ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY matematikából

› MEGOLDÁSOK

11-12. évfolyam

Kedves Olvasó!

Mellékletünk a kötetben szereplő összes feladat eredményét tartalmazza. A feladatok többségéhez megadtunk legalább egy lehetséges megoldási utat. A pdf-olvasóprogramok által kínált alkalmazási lehetőségek (pl. lapozás, kereshetőség stb.) mellett az ellenőrizni kívánt témakör megoldásait gyorsabban is elérheti, ha a tartalomjegyzékben a témakör címére kattint. Ekkor azonnal arra az oldalra ugorhat, amelyiken a választott témakör feladatainak megoldásai kezdődnek. A tartalomjegyzékhez a lap alján található ikonra kattintva juthat vissza legegyszerűbben.

Eredményes böngészést kívánunk!

A Szerzők és a Kiadó

Tartalomjegyzék

1. Hatvány, gyök, logaritmus – megoldások

1.1. Az n-edik gyök, törtkitevős hatványok

1. Mivel definíció szerint az $\sqrt[n]{x}$ kifejezés páratlan $n>1$ egész esetén minden valós x-re, páros $n>1$ egész esetén csakis nem negatív valós x-re értelmezett, továbbá tetszőleges valós x-re és k pozitív egészre $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}}=x$, $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$, ezért...

a) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4;$

b) $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5.$

2. a) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2;$

b) $\sqrt[3]{-343}=\sqrt[3]{(-7)^3}=-7.$

3. a) $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=\sqrt[4]{\left(2^2\right)^4}=4;$

b) $\sqrt[6]{-64}$ nem értelmezett;

c) $\sqrt[4]{(-5)^4}=|-5|=5.$

4. Az n-edik gyökvonás definíciója alapján:

a) $-2;\quad 5;\quad -2;\quad 3;\quad 3;\quad 10;\quad 2;$

b) $-1;\quad 2;$ nincs értelmezve; $0;\quad -7;\quad 2;$

c) $\frac{1}{2};\quad -\frac{2}{3};$ nincs értelmezve; $\frac{5}{4};\quad \frac{1}{5};$

d) $x;\quad |a|;\quad b^2;\quad \left|x^3\right|;\quad a^2;\quad -c;\quad y^2.$

5. a) $x\in\mathbb{R};$

b) $a\in\mathbb{R};$

c) $y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\};$

d) $c\in\mathbb{R};$

e) $b \in \mathbb{R}^{-} \cup \{0\}$;

f) $a \in \mathbb{R}$.

6. Használjuk fel az n-edik gyökvonás azonosságait!

a) $2+3=5$; $\sqrt[3]{35}$;

b) 20; 5;

c) $\frac{3}{2}$; 10;

d) $\sqrt[3]{1000}=10$; $\sqrt[4]{48\cdot 27}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4}=6$;

e) $\sqrt[4]{2^8}=2^2$; $\sqrt[6]{3^6}=3$;

f) 3^2; 5^3;

g) $\sqrt[6]{2^6}=2$; $\sqrt[4]{\sqrt[5]{2^5}}=\sqrt[4]{2}$;

h) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[8]{2}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}}=\sqrt[3]{3}$.

7. Felhasználva a prímtényezős felbontást, az n-edik gyök definícióját és a hatványozás, valamint a gyökvonás azonosságait:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{(-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}$;

b) $\frac{\sqrt[5]{18}\cdot\sqrt[5]{-48}\cdot\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[3]{-216}}=\frac{\sqrt[5]{2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 2^4\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{(-6)^3}}=\frac{\sqrt[5]{(2\cdot 3)^5}}{-6}=-1.$

8. $\frac{\sqrt[3]{4^5}\cdot\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{\sqrt[3]{(2^2)^5\cdot 2^2\cdot 3^3}}{\sqrt[3]{10^3}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}\cdot 2^2\cdot 3^3}}{10}=\frac{\sqrt[3]{(2^4\cdot 3)^3}}{10}=\frac{48}{10}=4{,}8.$

9. Felhasználva a prímtényezős felbontást, az n-edik gyök definícióját és a hatványozás, valamint a gyökvonás azonosságait:

a)

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{20}}\cdot\sqrt[3]{100}}{\sqrt[6]{0{,}2}}=\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 5}\cdot\sqrt[6]{(2^2\cdot 5^2)^2}}{\sqrt[6]{5^{-1}}}=\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[6]{2^2\cdot 5}\cdot\sqrt[6]{2^4\cdot 5^4}=\sqrt[6]{5^6\cdot 2^6}=\sqrt[6]{10^6}=10;$$

b)

$$\frac{\sqrt[4]{15^5}\cdot\sqrt{\sqrt{27}}\cdot\sqrt[4]{1600}}{\sqrt{\sqrt{625}}\cdot\sqrt[4]{8000}}=\frac{\sqrt[4]{3^5\cdot 5^5}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 5^2}}{\sqrt[4]{5^4}\cdot\sqrt[4]{2^6\cdot 5^3}}=\sqrt[4]{\frac{3^5\cdot 5^5\cdot 3^3\cdot 2^6\cdot 5^2}{5^4\cdot 2^6\cdot 5^3}}=\sqrt[4]{\frac{3^8\cdot 5^7}{5^7}}=9.$$

10. Gyökjel alól kivitellel oldjuk meg a feladatot!

$$\left(2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+3\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{25}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=3+5=8.$$

Az $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$ azonosságot alkalmaztuk, de tagonkénti szorzással és utána összevonással is megoldható.

11. a) $\sqrt[6]{\sqrt{12}+\sqrt{11}}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}=$

$=\sqrt[6]{\left(\sqrt{12}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{11}\right)}=$

$=\sqrt[6]{12-11}=\sqrt[6]{1}=1.$

b) $\sqrt[5]{4\sqrt{10}+\sqrt{128}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{160}-8\sqrt{2}}=$

$=\sqrt[5]{\left(\sqrt{160}+\sqrt{128}\right)\left(\sqrt{160}-\sqrt{128}\right)}=$

$=\sqrt[5]{160-128}=\sqrt[5]{32}=2.$

12. Írjuk fel mindkét kifejezést azonos gyökkitevőjű alakban, és használjuk fel, hogy az n-edik gyökfüggvény szigorúan monoton növekvő!

a) $\sqrt[3]{54} \quad < \quad \sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56};$

b) $\sqrt[4]{162} \quad > \quad \sqrt[4]{160};$

c) $\sqrt[5]{\frac{16}{81}} \quad < \quad \sqrt[5]{\frac{81}{16}};$

d) $\sqrt[6]{3^2} \quad > \quad \sqrt[6]{2^3};$

e) $\sqrt{2} \quad < \quad \sqrt{3}.$

13. Ha mindkét számot hatodik hatványra emeljük, akkor mindkét gyökjeltől megszabadulhatunk, továbbá a kapott két szám nagyságviszonya megegyezik az eredeti, nemnegatív számok nagyságviszonyával, így

$\left(\sqrt{3}\right)^6=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^3=3^3=27>\left(\sqrt[3]{4}\right)^6=\left(\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\right)^2=4^2=16$ miatt $\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}$.

14. Mivel $\sqrt[4]{4}=\sqrt{\sqrt{2^2}}=\sqrt{2}$, így 30. hatványra emelve:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{30}=\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right)^{10}=3^{10};\ \left(\sqrt{2}\right)^{30}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{15}=2^{15};\ \left(\sqrt[5]{5}\right)^{30}=\left(\left(\sqrt[5]{5}\right)^5\right)^6=5^6.$$

A kapott számok nagyságviszonya megegyezik az eredeti, nemnegatív számok nagyságviszonyával. Vegyük észre, hogy $9>8 \Leftrightarrow 3^2>2^3 \Leftrightarrow 3^{10}>2^{15}$, $32>25 \Leftrightarrow 2^5>5^2 \Leftrightarrow 2^{15}>5^6$, így $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}$!

15. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\sqrt[3]{5}$ racionális, ekkor $\sqrt[3]{5}=\dfrac{p}{q}$ alakban írható, ahol p, q pozitív egészek és relatív prímek, azaz a tört már legegyszerűbb alakjában áll. Köbre emelés és rendezés után $5=\dfrac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 5q^3=p^3$.

Mivel a bal oldal 5-tel osztható, így a jobb oldalon is 5-tel osztható számnak kell állnia, ezért $p=5k$ alakú, ahol k pozitív egész. Innen $5q^3=125k^3$, ebből $q^3=25k^3$. A jobb oldalon 5-tel osztható szám áll, ezért a bal oldalon álló számnak is 5-tel oszthatónak kell lennie, ezért $q=5l$ alakú, ahol l pozitív egész. Azt kaptuk, hogy p és q is osztható 5-tel, ami ellentmond annak, hogy relatív prímek. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás bizonyított.

Megjegyzés:

Belátható, hogy $\sqrt[n]{k}$, ahol $n,k>1$ pozitív egész, pontosan akkor racionális szám, ha k egy pozitív egész szám n-edik hatványa.

16. Jelöljük a kifejezést x-szel! Köbre emelés után, felhasználva az $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ azonosságot

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}\cdot x.$$

Mivel $\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}=\sqrt[3]{9^2-80}=1$, így $x^3-3x-18=0$.

Vegyük észre, hogy $x=3$ megoldása az egyenletnek, így az $x-3$ gyöktényező kiemelése után: $(x-3)\left(x^2+3x+6\right)=0$!

A második zárójelben álló másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, így nincs valós gyöke, ezért az egyenletnek sincs több valós megoldása. A feladatban szereplő kifejezés értéke ezért 3.

17. Alkalmazzuk többször a két tag összege és különbsége szorzatára vonatkozó azonosságot!

$$\left(\sqrt[8]{8}-\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{8}+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt[8]{8}^2-\sqrt[8]{3}^2\right)\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt[4]{8}^2-\sqrt[4]{3}^2\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=8-3=5.$$

18. Használjuk fel az n-edik gyökvonás azonosságait!

a) $\sqrt{\sqrt[5]{2^5\cdot 2}}=\sqrt[10]{2^6}=\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3\cdot 2}}=\sqrt[12]{54}$;

b) $\sqrt[60]{2^{16}}=\sqrt[15]{2^4}$; $\sqrt[48]{\dfrac{2^7}{5^7}}$;

c) $\sqrt[8]{a^7}$; x^2;

d) $\sqrt[21]{y^7}\cdot\sqrt[21]{y^3}=\sqrt[21]{y^{10}}$; $\sqrt[12]{c^6}\cdot\sqrt[12]{c^{18}}\cdot\sqrt[12]{c^4}=\sqrt[12]{c^{28}}=\sqrt[3]{c^7}$;

e) $\sqrt[12]{a^5}$; 1.

19. Alkalmazzuk a gyökvonás és a hatványozás azonosságait!

a) $\dfrac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^6}}{\sqrt{a^5}\cdot\sqrt{a^{-2}}}=\dfrac{\sqrt{a^4}\cdot a^2}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{a^4}{a\sqrt{a}}=\dfrac{a^3}{\sqrt{a}}=a^2\sqrt{a}.$

b) $\dfrac{\sqrt{a^5b^3}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{a^5\cdot b^4}{a}}=\sqrt{a^4b^4}=a^2b^2.$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[6]{b^{-7}}}{\sqrt[6]{a^{-6}b^{-6}}}=\dfrac{\sqrt[6]{ab\cdot a^5\cdot b^{-7}}}{\sqrt[6]{a^{-6}b^{-6}}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^6b^{-6}}{a^{-6}b^{-6}}}=\sqrt[6]{a^{12}}=a^2.$

21. A törtkitevőjű hatvány definíciója szerint $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$; $m\in\mathbb{Z}$; $n\in\mathbb{N}$; $n\ge 2$), ezért:

a) $16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^4}=2$;

b) $27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(3^{-2}\right)^3}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}.$

22. a) $0{,}125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(2^{-3}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(2^{-2}\right)^3}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$;

b) $64^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\left(4^3\right)^{-4}}=\sqrt[3]{\left(4^{-4}\right)^3}=\left(2^2\right)^{-4}=2^{-8}=\dfrac{1}{256}.$

23. Felhasználva a törtkitevőjű hatvány definícióját, továbbá a hatványozás azonosságait:

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$;

b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(3^{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{4}{12}+\frac{9}{12}} = 3^{\frac{13}{12}}$.

24. $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{12}+\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{12}+\frac{30}{12}} = 3^{\frac{31}{12}}$.

25. Felhasználva a törtkitevőjű hatvány definícióját, továbbá a hatványozás azonosságait:

a) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{9}{12}-\frac{4}{12}} = x^{\frac{5}{12}}$;

b) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{x} = x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-1} = x^{-\frac{1}{6}}$.

26. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}-\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$.

27. Írjuk fel először az összes számot az 5 hatványaként!

5^{-1}; $\left(5^{-1}\right)^{-\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{2}{3}}$.

Ha minden számot hatodik hatványra emelünk, akkor egyrészt eltűnik a törtkitevő, másrészt nem változik meg a nemnegatív számok egymáshoz viszonyított nagysága. Az így kapott számok: 5^{-6}, 5^{8}, 5^{2}, 5^{3}, 5^{4}, ezért az eredeti számokra:

$5^{-1} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{5} < 5^{\frac{2}{3}} < 0{,}2^{-\frac{4}{3}}$.

28. Felhasználva a törtkitevőjű hatvány definícióját, továbbá a hatványozás azonosságait:

$\dfrac{\sqrt[3]{a^{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{ab}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = ab.$

29.
$$\left(8a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{b^{-\frac{1}{3}}a\sqrt[4]{b^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8a^{-\frac{1}{2}}\left(b^{-\frac{1}{3}}a\left(b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8a^{-\frac{1}{2}}\left(b^{-\frac{1}{3}}ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

30. a) Vegyük figyelembe, hogy $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, valamint alkalmazzuk a hatványozás azonosságait!

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(a^{-1}+b^{-1}\right)+\frac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) =$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{ab} = \frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}{ab} = \frac{1}{ab}.$$

b) A kifejezés egyszerűbb alakjából azonnal adódik, hogy $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$ esetén a kifejezés értéke 6.

31. Tekintsük a következőket:

$$f\left(f\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-x^{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1-x^{3}-1}{1-x^{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^{3}}{x^{3}-1}}};$$

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{\frac{x^{3}}{x^{3}-1}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{x^{3}-1}{x^{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^{3}-x^{3}+1}{x^{3}}}} = x.$$

Mivel a 2010 osztható 3-mal, ezért a kérdezett szám 19-cel egyenlő.

32. Figyelembe véve az $\left(a-b\right)\left(a+b\right) = a^{2}-b^{2}$ azonosságot, a törtet bővítve:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}.$$

33. Figyelembe véve az $\left(a-b\right)\left(a^{2}+ab+b^{2}\right) = a^{3}-b^{3}$ azonosságot, bővítsük a törtet $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)$-gyel! Kaphatjuk, hogy a tört: $\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$.

34. Figyelembe véve az $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ azonosságot:

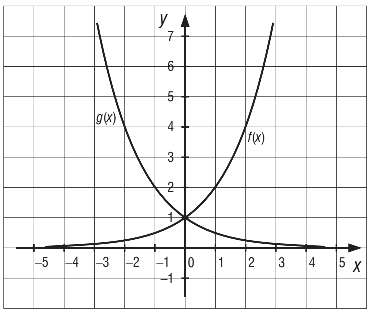
$$0<\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}=\frac{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}{1}=\frac{n+3-n}{\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)n}+\sqrt[3]{n^2}}<\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Ha $\varepsilon>0$ rögzített szám, akkor $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\varepsilon$, ebből $\frac{1}{\varepsilon^3}<n$, ami mutatja, ha $n>\frac{1}{\varepsilon^3}$, akkor a vizsgált kifejezés kisebb mint ε.

1.2. Exponenciális függvények

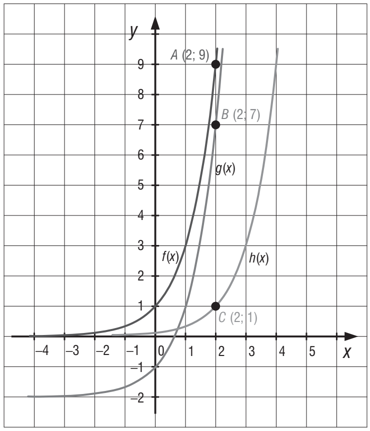
35. a)



b) A két grafikon tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

c) Mivel $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(2^{-1}\right)^x=2^{-x}=f(-x)$, ezért állításunk nyilvánvaló.

36. a), b)



c) Mivel $3^x = 1$, ebből $x = 0$;

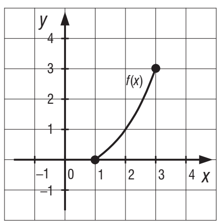
$3^x - 2 = 1$, ebből $3^x = 3^1$;

és ebből $x = 1$;

$3^{x-2} = 1$, ebből $x = 2$,

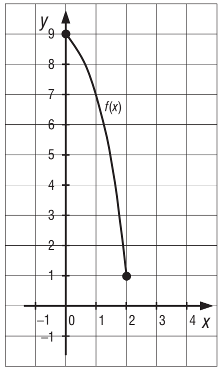
így az f grafikonján a (0,1), a g grafikonján az (1,1), a h grafikonján a (2,1) pontokról van szó. (Kihasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.)

37. a)



b) A grafikonról leolvasható, hogy az értékkészlet: $[0;3]$.
c) A függvény zérushelye $x = 1$.

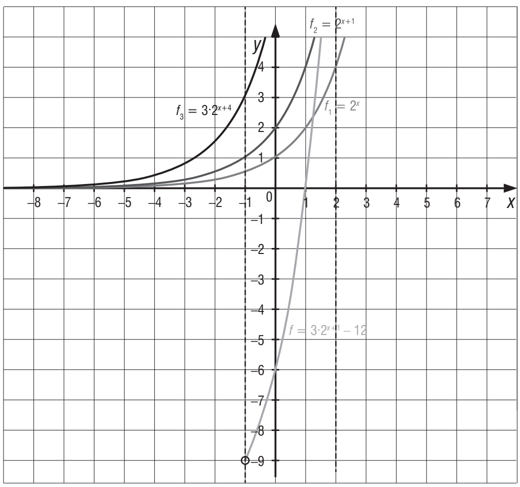
38. a)



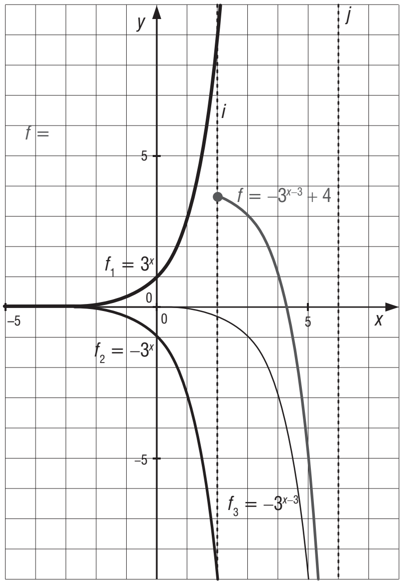
b) Mivel $0 \le x \le 2$ esetén az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $1 \le 3^x \le 9$, így az értékkészlet: $[1;9]$.

c) Mivel az $x \mapsto 3^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $10 - 3^x > 7$ ebből $3 > 3^x$ ebből $1 > x$, így a megfelelő helyek: $0 \le x < 1$.

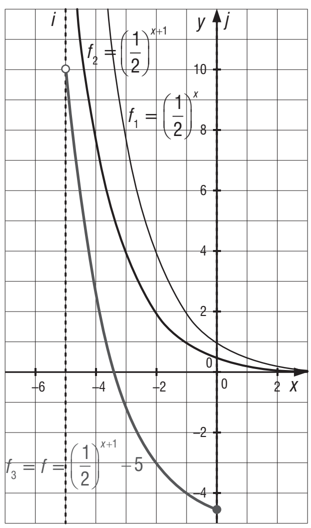
39. $f_1 = 2^x$, $f_2 = 2^{x+1}$, $f_3 = 3 \cdot 2^{x+1}$, $f_4 = f = 3 \cdot 2^{x+1} - 12$. A lépések pedig: eltolás „balra" 1 egységgel, 3-szoros nyújtás merőlegesen a „vízszintes" tengelyre (merőleges affinitás), eltolás „lefelé" 12 egységgel.



40. $f_1 = 3^x$, $f_2 = -3^x$, $f_3 = -3^{x-3}$, $f_4 = f = -3^{x-3} + 4$. A lépések pedig: tükrözés a „vízszintes" tengelyre, eltolás „jobbra" 3 egységgel, eltolás „felfelé" 4 egységgel.

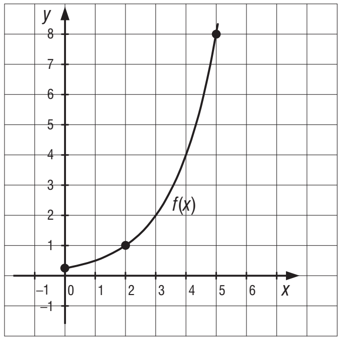


41. $f_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $f_3 = f = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 5$. A lépések pedig: eltolás „balra" 1 egységgel, eltolás „lefelé" 5 egységgel.



42. a) Ha x jelöli az eltelt napok számát és $f(x)$ a lefedett terület nagyságát, akkor

$$f(x)=0,25\cdot 2^x=\frac{1}{4}\cdot 2^x=2^{x-2}.$$



b) Az $f(2)=1$; $f(5)=8$ miatt 2 nap múlva 1 m^2, 5 nap múlva pedig 8 m^2 lesz a békalencsés része a vízfelületnek.

c) Mivel $2^{x-2}=128$, ebből $2^{x-2}=2^7$, ebből $x=9$, ezért 9 nap alatt fedi be a békalencse a tó teljes felületét. (Kihasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.)

43. a) Mivel $\frac{N(t)}{N_0}=0,25$, ezért $2^{-\frac{t}{5570}}=2^{-2}$, ebből $\frac{t}{5570}=2$, ebből $t=11\,140$, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. A lelet tehát kb. 11 100 éves.

b) Mivel $\frac{N(t)}{N_0}=\frac{1}{3}$, ezért $2^{-\frac{t}{5570}}=\frac{1}{3}$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, ekkor $-\frac{t}{5570}\lg 2=\lg\frac{1}{3}=-\lg 3$, ebből $t=5570\frac{\lg 3}{\lg 2}\approx 8828$, a lelet tehát kb. 8800 éves.

44. Jelölje N_1 a 235-ös, N_2 pedig a 238-as izotóp atommagok számát, T_1 és T_2 pedig a felezési időket! A bomlási törvényt felhasználva:

$$0,01=\frac{N_1(t)}{N_2(t)}=\frac{N_1(0)}{N_2(0)}\cdot\frac{2^{-\frac{t}{T_1}}}{2^{-\frac{t}{T_2}}}=\frac{3}{7}\cdot 2^{t\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}.$$

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve:

$$-2 = \lg\left(\frac{3}{7}\right) + t \cdot \lg 2 \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

$$-2 = -0,368 + t \cdot 0,301\left(-1,1867 \cdot 10^{-9}\right),$$

$$5,422 = t \cdot 1,1867 \cdot 10^{-9},$$

$$t = 4,569 \cdot 10^{9} \approx 4,57 \cdot 10^{9}.$$

Tehát $4,57 \cdot 10^{9}$ év múlva lesz a 235-ös izotóp mennyisége a 238-as izotóp mennyiségének 1%-a.

1.3. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

45. Mivel $343 = 7^3$, így az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $2x = 3$, ebből $x = \frac{3}{2}$.

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

46. Írjuk fel mindkét oldalt a 2 hatványaként! Mivel $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$, ezért az egyenlet:

$$2^{x-1} = 2^{-2}, \text{ ebből } x - 1 = -2, \text{ ebből } x = -1,$$

és felhasználtuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

47. Mindkét oldalt felírva az 5 hatványaként:

$$5^{\frac{x}{3}} = 5^{-3}.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$\frac{x}{3} = -3,$$

$$x = -9.$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

48. Vegyük észre, hogy $1 = 3^0$, így az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az eredeti egyenlet egyenértékű az alábbival:

$$x^2 - 4x + 3 = 0!$$

Ennek megoldásai: $x_1 = 1,\ x_2 = 3.$
Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet is.

49. Írjuk fel mindkét oldalt a 2 hatványaként:

$$2^{\frac{x-1}{5}} = \left(2^{-2}\right)^{x^2-1},$$

$$2^{\frac{x-1}{5}} = 2^{-2x^2+2}!$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt:

$$\frac{x-1}{5} = -2x^2 + 2,$$

ahonnan:

$$x-1 = -10x^2 + 10,$$

$$10x^2 + x - 11 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1 = 1,\ x_2 = -1{,}1.$ Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így pontosan ezek a megoldásai az eredeti egyenletnek is.

50. Mivel $9 = 3^2$, így hatványazonosság miatt:

$$3^{2\sqrt{x}} = 3^{x-3};\ x \ge 0.$$

Felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$2\sqrt{x} = x - 3.$$

Négyzetre emelve az egyenlet két oldalát, majd rendezve:

$$4x = x^2 - 6x + 9,$$

$$0 = x^2 - 10x + 9.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1 = 1,\ x_2 = 9$, de behelyettesítés után kiderül, hogy az eredeti egyenletnek ezek közül csak az $x = 9$ a megoldása.

51. Hatványazonosság felhasználásával:

$$5 \cdot 5^x - 5^x = 20,$$

$$4 \cdot 5^x = 20,$$

$$5^x = 5.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt innen $x = 1.$ Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

52. Hatványazonosság felhasználásával:

$$3^x - \frac{3^x}{3} = 18,$$
$$3 \cdot 3^x - 3^x = 54,$$
$$2 \cdot 3^x = 54,$$
$$3^x = 27 = 3^3,$$

ahonnan $x = 3$, az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

53. Hatványazonosság felhasználásával:

$$3^x + 9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 13,$$
$$13 \cdot 3^x = 13,$$
$$3^x = 1;$$

ahonnan $x = 0$, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

54. Hatványazonosságok felhasználásával:

$$2 \cdot 2^x + \frac{3 \cdot 2^x}{2} - 5 \cdot 2^x = -6,$$
$$4 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 10 \cdot 2^x = -12,$$
$$-3 \cdot 2^x = -12,$$
$$2^x = 4.$$

Felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$x = 2.$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

55. Az előző feladat megoldásánál látott gondolatmenetet alkalmazva kaphatjuk, hogy a megoldás: $x = 2$.

56. Vezessük be az $5^x = a(>0)$ helyettesítést! Hatványazonosság miatt az egyenlet $a^2 - 4a - 5 = 0$ alakú lesz.
Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = -1$, $a_2 = 5$. Ezek közül $a > 0$ miatt a_1 nem felel meg, a másikból pedig $x = 1$, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

57. Hatványazonosságokat alkalmazva:

$$9\cdot 9^x+9\cdot 3^x=810,$$
$$9^x+3^x=90,$$
$$3^{2x}+3^x-90=0.$$

Vezessük be az $3^x=a(>0)$ helyettesítést! Ekkor az egyenlet:

$$a^2+a-90=0.$$

Ennek pozitív megoldása: $a=9$, így az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=2$.

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

58.

$$2^{x+4}+2^{x+3}=12,$$
$$16\cdot 2^x+8\cdot 2^x=12,$$
$$24\cdot 2^x=12,$$
$$2^x=\frac{1}{2},$$
$$2^x=2^{-1}.$$

A 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $x=-1$.

59. Ha bevezetjük a $3^x=a(>0)$ helyettesítést, akkor rendezés után:

$$\sqrt{a^2-8a}=3a-24.$$

Négyzetre emelést követően:

$$a^2-8a=9a^2-144a+576,$$
$$0=8a^2-136a+576,$$
$$0=a^2-17a+72.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1=9$, $a_2=8$. Az elsőből $x=2$, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát. Mivel x természetes szám, ezért $a=8$ nem felel meg, így az eredeti egyenlet egyetlen természetes szám megoldása a 2. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás valóban helyes.

60. Vezessük be a $3^{x+\sqrt{x^2+2}}=a\ (a>0)$ helyettesítést, ekkor az egyenlet:

$$a^2-\frac{4}{3}a=69,$$
$$3a^2-4a-207=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = 9,\ a_2 = -\frac{23}{3}$. Mivel a pozitív, így csakis $a = 9$ lehetséges, ezért:

$$3^{x+\sqrt{x^2+2}} = 3^2,$$

$$x + \sqrt{x^2+2} = 2,$$

felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.
Rendezés után:

$$\sqrt{x^2+2} = 2 - x,$$

$$x^2 + 2 = 4 - 4x + x^2,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás valóban helyes.

61. Használjuk fel, hogy $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 1$!
Vezessük be a $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9} = a\ (a > 0)$ helyettesítést, ekkor az egyenlet:

$$a + \frac{1}{a} = 6,$$

$$a^2 - 6a + 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai:

$$a_1 = 3 + 2\sqrt{2},\ a_2 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}.$$

Innen, felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ vagy } x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Az első egyenlet megoldásai: $x_1 = 4,\ x_2 = 2$. A második egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért nincs valós megoldása. Mivel a mondott feltételek mellett végig ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így a kapott megoldások az eredeti egyenlet összes valós megoldásai.

62. Mivel $2^{2x} = 4^x$, így az egyenlet:

$$4^x = 3^x,$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^0,$$

ahonnan az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $x = 0$.
Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

63. Hatványazonosságot alkalmazva:

$$7^{x-3}=4^{2(x-3)}=16^{x-3},$$

$$\left(\frac{7}{16}\right)^{x-3}=1,$$

$$\left(\frac{7}{16}\right)^{x-3}=\left(\frac{7}{16}\right)^{0},$$

ahonnan az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $x=3$. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

64. Szétválasztva két oldalra az 5, illetve a 2 hatványait:

$$20\cdot5^{x}=20\cdot2^{x},$$

$$5^{x}=2^{x},$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{0},$$

$$x=0,$$

az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

65. Hatványazonosságot alkalmazva:

$$16\cdot2^{x}+8\cdot2^{x}+2^{x}=5\cdot5^{x}-5^{x},$$

$$25\cdot2^{x}=4\cdot5^{x},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2},$$

ahonnan az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát felhasználva: $x=2$. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a megoldás helyes.

66. A nevezőkkel való szorzás és rendezés után:

$$6\cdot4^{x}+6\cdot9^{x}-13\cdot6^{x}=0.$$

Bevezetve a $2^{x}=a\ (a>0)$; $3^{x}=b\ (b>0)$ helyettesítéseket, felszínre kerül az egyenlet szerkezete:

$$6a^{2}-13ab+6b^{2}=0\,.$$

Osztva b^2-tel:

$$6\left(\frac{a}{b}\right)^{2}-13\frac{a}{b}+6=0.$$

Ennek az $\frac{a}{b}$-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $\frac{3}{2}$ és $\frac{2}{3}$.

Innen $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$,

$x = -1$,

illetve $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1$,

$x = 1$,

az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát felhasználva. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldások helyesek.

67. Bevezetve a $3^{\frac{x}{2}} = a\ (a > 0)$; $2^{\frac{x}{2}} = b\ (b > 0)$ helyettesítéseket az egyenlet szerkezete:

$$4a^2 - 5ab - 9b^2 = 0.$$

Osztva b^2-tel:

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\frac{a}{b} - 9 = 0.$$

Ennek az $\frac{a}{b}$-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $\frac{9}{4}$ és –1, de ez utóbbi nem lehetséges, hiszen a és b pozitívak.
Kaptuk, hogy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát felhasználva:

$$x = 4.$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldás helyes.

68. Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt az eredeti egyenletrendszer ekvivalens az alábbival:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$$

Az első egyenletből: $y = 2x - 1$, melyet a második egyenletbe helyettesítve:

$$5x - 2(2x - 1) = 4,$$

$$x + 2 = 4,$$

$x = 2$, ebből $y = 3$. A megoldás (2; 3).

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldás helyes.

69. Bevezetve az $5^x = a(a > 0)$; $2^y = b(b > 0)$ helyettesítéseket:

$$\begin{cases} a + 3b = 17, \\ 2a - 5b = -10. \end{cases}$$

Az első egyenletből: $a = 17 - 3b$, melyet a másodikba helyettesítve:

$$2(17 - 3b) - 5b = -10,$$
$$34 - 11b = -10,$$
$$44 = 11b,$$
$$4 = b, \text{ ebből } a = 5.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt innen $x = 1$; $y = 2$.

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldás helyes.

70. Bevezetve az $3^x = a(a > 0)$; $2^y = b(b > 0)$ helyettesítéseket:

$$\begin{cases} 6a - 7b = 40, \\ -2a + 5b = -8. \end{cases}$$

A második egyenlet 3-szorosát az első egyenlethez adva:

$$8b = 16,$$
$$b = 2, \text{ ebből } a = 9.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt innen $x = 2$; $y = 1$.

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldás helyes.

71. Végezzük el a $64^x = a(a > 0)$; $64^y = b(b > 0)$ helyettesítéseket! Ekkor az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12, \\ ab = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

A második egyenletből: $b = \dfrac{4\sqrt{2}}{a}$, amit behelyettesítve az első egyenletet kapjuk, hogy

$$a^2 + \frac{32}{a^2} = 12, \text{ ebből } a^4 - 12a^2 + 32 = 0.$$

Ennek az a^2-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a^2 = 4$, $a^2 = 8$. Mivel $a > 0$, így innen $a = 2$, ebből $b = 2\sqrt{2}$ vagy $a = 2\sqrt{2}$, ebből $b = 2$. Figyelembe véve, hogy $64 = 2^6$ és $2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$, valamint az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$64^x = 2,$$
$$x = \frac{1}{6};$$
$$64^y = 2^{\frac{3}{2}},$$
$$y = \frac{1}{4},$$

illetve

$$64^x = 2\sqrt{2},$$
$$x = \frac{1}{4};$$
$$64^y = 2,$$
$$y = \frac{1}{6}.$$

Mivel a mondott feltételek mellett ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így pontosan ez a két valós számpár elégíti ki az eredeti egyenletrendszer egyenleteit is.

72. Hatványazonosságokat, illetve a törtkitevős hatvány definícióját alkalmazva:

$$\begin{cases} 2^{\left(x^2+2x-4\right)y^2} = 2^{-4}, \\ 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{y-1}{2}}. \end{cases}$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt innen

$$\begin{cases} \left(x^2+2x-4\right)y^2 = -4, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2}. \end{cases}$$

A második egyenletből: $y = x + 1$, melyet az elsőbe helyettesítve:

$$\left(x^2+2x-4\right)\left(x^2+2x+1\right) = -4.$$

Legyen $x^2 + 2x = a$, ekkor

$$(a-4)(a+1) = -4,$$
$$a^2 - 3a = 0,$$
$$a(a-3) = 0,$$

ahonnan $a = 0$ vagy $a = 3$.
Két lehetőség van:

$$x^2 + 2x = 0, \text{ vagy } x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Az első egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \text{ és } x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -1.$$

A második egyenlet megoldásai:

$$x_3 = 1, \text{ ebből } y_3 = 2 \text{ és } x_4 = -3, \text{ ebből } y_4 = -2.$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott megoldások mindannyian teljesítik az eredeti egyenleteket.

73. Áttérve 4-es alapra, és új ismeretleneket bevezetve: $a = 4^{2x}$ és $b = 7^{y-6}$.

$$\begin{cases} a + 49b = 305, \\ 2a + b = 513. \end{cases}$$

Ebből $a = 256$ és $b = 1$ adódik rendezéssel. Azaz $4^{2x} = 4^4$ és $7^{y-6} = 7^0$, az exponenciális függvények szigorú monotonitása miatt pedig: $x = 2$ és $y = 6$.

74. Mivel a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 5^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$x - 2 < 13 - 2x,$$
$$3x < 15,$$
$$x < 5.$$

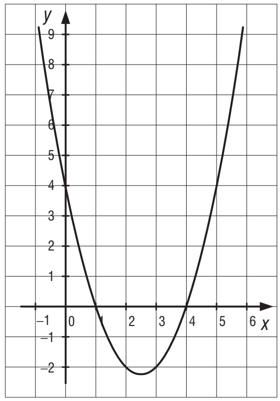
Az egyenlőtlenség megoldásai így az 1, 2, 3 és 4 számok.

75. Vegyük észre, hogy $256 = 2^8$! Mivel a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$5 - x \geq 8,$$
$$-3 \geq x.$$

76. Mivel $1 = \left(\dfrac{2007}{2008}\right)^0$, továbbá a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \left(\dfrac{2007}{2008}\right)^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökken (az alap 1-nél kisebb pozitív szám), ezért az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival: $x^2 - 5x + 4 > 0$.

A bal oldalon álló másodfokú polinomfüggvénynek az 1 és 4 számok a zérushelyei, így vázlatos grafikonja:



Könnyen leolvashatjuk a megoldásokat: $x < 1$ vagy $x > 4$.

77. Mivel $343 = 7^3$, továbbá a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 7^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival: $\dfrac{2x-1}{x+1} > 3$.
Rendezve:

$$\frac{2x-1}{x+1} - 3 > 0,$$

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{3(x+1)}{x+1} > 0,$$

$$\frac{-x-4}{x+1} > 0,$$

$$\frac{x+4}{x+1} < 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha a számláló és a nevező előjele ellentétes, ahonnan: $-4 < x < -1$.

78. Vezessük be a $2^x = a(>0)$ helyettesítést! Ekkor az egyenlőtlenség, kihasználva, hogy $a > 0$:

$$a + \frac{2}{a} \le 3,$$

$$a^2 - 3a + 2 \le 0.$$

Mivel az $a^2 - 3a + 2$ másodfokú polinomfüggvény zérushelyei $a = 1$ és $a = 2$, ezért a fenti egyenlőtlenség megoldása: $1 \le a \le 2$.

Mivel az $x \mapsto 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $0 \le x \le 1$.

79. Előrebocsátjuk, hogy a bal oldalon szereplő függvény nem exponenciális függvény, ezért elvi hibás minden olyan megoldás, amely ennek pl. a szigorúan monoton növekedésére hivatkozik. (A függvény növekedési viszonyai differenciálszámítás segítségével tisztázhatóak.)
Mivel a pozitív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton növekedő, valamint az egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív számok állnak, ezért az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha tekintjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\left(x^2 - 7x + 12\right)\lg\left(x+1\right) > 0.$$

Mivel x pozitív, $\lg\left(x+1\right) > 0$, következésképpen elegendő megmondani, mikor teljesül

$$x^2 - 7x + 12 > 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú polinomfüggvénynek a 3 és 4 számok a zérushelyei, így a megoldások: $0 < x < 3$ vagy $4 < x$.

80. Alkalmazzuk az $y = 3^x\ (> 0)$ helyettesítést!

$$\frac{y^2 - 12y + 27}{y^2 - 28y + 27} \le 0$$

A másodfokú polinom gyöktényezős alakját felhasználva szorzattá alakítjuk az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő algebrai tört számlálóját és nevezőjét.

$$\frac{(y-3)(y-9)}{(y-1)(y-27)} \le 0$$

Készítsünk előjeltáblázatot!

y	számláló	nevező	tört
$0 < y < 1$	+	+	+
1	+	0	nem ért.
$1 < y < 3$	+	–	–
3	0	–	0
$3 < y < 9$	–	–	+
9	0	–	0
$9 < y < 27$	+	–	–
27	+	0	nem ért.
$27 < y$	+	+	+

Az y ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]1;3] \cup [9;27[$. Tekintettel arra, hogy a 3 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, az x ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]0;1] \cup [2;3[$.

81. Használjuk fel az azonos alapú hatványok hányadosára vonatkozó összefüggést és mindent írjunk fel 3-as alappal!

$$\frac{\sqrt{3}}{3^{2x-1}} \le 9,$$

$$3^{\left(\frac{1}{2}-2x+1\right)} \le 3^2.$$

Használjuk fel, hogy a 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő!

$\frac{1}{2}-2x+1 \le 2,$ amelynek a megoldása: $-0{,}25 \le x$.

1.4. A logaritmus fogalma, azonosságai

82. A logaritmus definíciója szerint $\log_a b$ jelöli azt a kitevőt, melyre a-t emelve a b-t kapjuk $(a>0;\ a\ne 1;\ b>0)$, ezért:
a) 2; b) 4.

83. a) –1; b) 3.

84. a) 3; b) –2.

85. Alkalmazva a törtkitevős hatvány és a logaritmus definícióját:

a) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; b) $\log_3 \sqrt[3]{81} = \log_3 3^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$.

86. a) $\log_2 \sqrt[7]{64} = \log_2 2^{\frac{6}{7}} = \frac{6}{7}$; b) $\log_5 \sqrt[4]{125} = \log_5 5^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

87. a) Legyen $\log_{\sqrt{2}} 4 = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$\left(\sqrt{2}\right)^x = 4,$$

$$2^{\frac{x}{2}} = 2^2.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = 4.$$

b) Legyen $\log_{\sqrt[3]{2}} 8 = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 8,$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^3$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = 9.$$

88. a) Legyen $\log_{0,1} \sqrt{1000} = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$(0,1)^x = \sqrt{1000},$$

$$10^{-x} = 10^{\frac{3}{2}}.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = -\frac{3}{2}.$$

b) Legyen $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{27}} = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-\frac{3}{2}},$$

$$3^{-x} = 3^{-\frac{3}{2}}.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = \frac{3}{2}.$$

89. Alkalmazva a törtkitevős hatvány és a logaritmus definícióját:

a) $\log_a a^3 = 3$; b) $\log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

90. a) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$;

b) Legyen $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$! Ekkor a logaritmus definíciója miatt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2,$$

$$a^{-x} = a^2.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = -2.$$

91. a) Legyen $\log_{a^3} \sqrt[3]{a^2} = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$\left(a^3\right)^x = a^{\frac{2}{3}},$$

$$a^{3x} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = \frac{2}{9}.$$

b) Legyen $\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = x$! Ekkor a logaritmus és a törtkitevős hatvány definíciója miatt:

$$\left(\sqrt{a}\right)^x = a^{-\frac{1}{3}},$$

$$a^{\frac{x}{2}} = a^{-\frac{1}{3}}.$$

Felhasználjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton.

$$x = -\frac{2}{3}.$$

92. Hatványazonosság, illetve a logaritmus definíciója miatt:

a) $\left(10^2\right)^{\lg\sqrt{10}} = \left(10^{\lg\sqrt{10}}\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10;$

b) $\left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81.$

c) Mivel a törtkitevős hatvány definíciója miatt $8 = 4^{\frac{3}{2}}$, ezért

$$8^{\log_4 25} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_4 25} = \left(4^{\log_4 25}\right)^{\frac{3}{2}} = (25)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125.$$

93. Hatványazonosság, illetve a logaritmus definíciója miatt:

$$49^{\log_{\sqrt{7}}3+\log_7 2}=\left(\left(\sqrt{7}\right)^4\right)^{\log_{\sqrt{7}}3}\cdot\left(7^2\right)^{\log_7 2}=\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\log_{\sqrt{7}}3}\right)^4\cdot\left(7^{\log_7 2}\right)^2=3^4\cdot 2^2=324.$$

94. Hatványazonosság, illetve a logaritmus definíciója miatt:

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}2-\log_{\sqrt{3}}4}=\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}2}}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^4\right)^{\log_{\sqrt{3}}4}}=\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}2}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}4}\right)^4}=\frac{2^{-2}}{4^4}=\frac{1}{2^2\cdot 2^8}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}.$$

95. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\log_5 15+\log_5 35-\log_5 21=\log_5(15\cdot 35)-\log_5 21=\log_5\frac{15\cdot 35}{21}=\log_5 5^2=2.$$

96. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\log_3 6+\log_3 105-\log_3 15-\log_3 14=\log_3(6\cdot 105)-\log_3(15\cdot 14)=$$
$$=\log_3\frac{6\cdot 105}{15\cdot 14}=\log_3 3=1.$$

97. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$3\log_3 6+\log_3 35-\log_3 20-\log_3 42=\log_3(216\cdot 35)-\log_3(20\cdot 42)=\log_3\frac{216\cdot 35}{20\cdot 42}=$$
$$=\log_3 9=2.$$

98. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\lg\sqrt{11}-\frac{1}{2}\lg 55-\lg\sqrt{5}+\lg 500=\lg\left(\sqrt{11}\cdot 500\right)-\lg\left(\sqrt{55}\cdot\sqrt{5}\right)=\lg\frac{\sqrt{11}\cdot 500}{5\cdot\sqrt{11}}=$$
$$=\lg 100=2.$$

99. Tudjuk, hogy $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ezért azonosságot alkalmazva: $\lg 4+\lg\sin 30°+\lg\operatorname{tg}30°+\lg\cos 30°=\lg\left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lg 1=0.$

100. Mivel

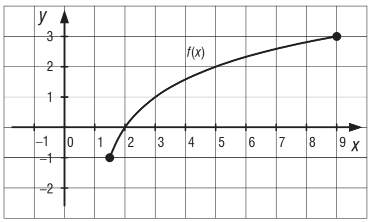
$$\left(\sin 30° + \cos 30°\right)^2 = \sin^2 30° + 2\sin 30° \cos 30° + \cos^2 30° = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

továbbá $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ezért a kifejezés értéke 0.
(Felhasználtuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.)

101. $\log_{30} 8 = \dfrac{\lg\left(2^3\right)}{\lg 30} = \dfrac{3\lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \dfrac{3\lg\left(\frac{10}{5}\right)}{b+1} = \dfrac{3\left(\lg 10 - \lg 5\right)}{b+1} = \dfrac{3(1-a)}{b+1}.$

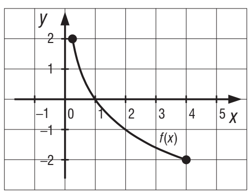
1.5. A logaritmusfüggvény

102. a)



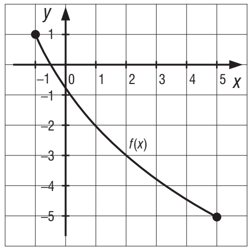
b) Mivel $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ és $\log_2 8 = 3$, továbbá a függvény szigorúan monoton nő, így értékkészlete: $[-1, 3]$.
c) A zérushely: $x = 2$.

103. a)



b) Mivel $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ és $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$, továbbá a függvény szigorúan monoton csökken, így értékkészlete: $[-2, 2]$.
c) A zérushely: $x = 1$.

104. a)



b) Mivel $\log_2 2 = 1$ és $\log_2 8 = 3$, továbbá $f(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen $x \mapsto \log_2(x+3)$ szigorúan monoton nő, ezért az értékkészlet: $[-5,1]$.

105. a) A logaritmus értelmezése miatt egyszerre teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 > 0; \\ x + 4 > 0. \end{cases}$$

Mivel

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3);$$

ezért

$$x^2 + x - 12 > 0 \text{ ebből } x > 3 \text{ vagy } x < -4.$$

Összevetve a másik egyenlőtlenséggel, adódik a közös rész, ami a függvény értelmezési tartománya lesz: $x > 3$, $x \in \mathbb{R}$.

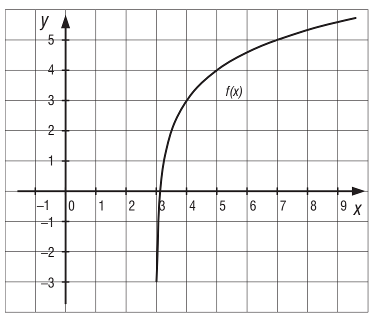
b) A logaritmus azonosságait alkalmazva:

$$f(x) = \log_2(x^2 + x - 12) - \log_2(x+4) + 3 = \log_2 \frac{x^2 + x - 12}{x+4} + 3 = \log_2(x-3) + 3.$$

Zérushely:

$$f(x) = 0,$$
$$\log_2(x-3) = -3,$$
$$x - 3 = 2^{-3},$$
$$x = 3{,}125.$$

c)



1.6. Logaritmust tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

106. Az egyenlet értelmezési tartománya az $]-3;\infty[$ intervallum. Használjuk fel az azonos alapú logaritmusok különbségére vonatkozó összefüggést: $\log_3\left(\frac{x+5}{x+3}\right)=\log_3 3$! Továbbá használjuk fel a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását!

$$\frac{x+5}{x+3}=3,$$

$$x+5=3x+9,$$

$$x=-2.$$

A –2 eleme az értelmezési tartománynak, ezért megoldás.

107. A logaritmus értelmezése miatt:

$$2x+3>0,$$

$$x>-\frac{3}{2}.$$

A logaritmus definíciója miatt:

$$2x+3=3^5,$$

$$x=120.$$

A kapott szám benne van az értelmezési tartományban, és behelyettesítéssel könnyű ellenőrizni a megoldás helyességét.

108. A logaritmus értelmezése miatt:

$$x^2-3x>0,$$

$$x(x-3)>0;$$

ami pontosan akkor igaz, ha $x<0$ vagy $x>3$.
A logaritmus definíciója miatt:

$$x^2-3x=2^2,$$

$$x^2-3x-4=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1=4$; $x_2=-1$. Mindkét szám benne van az egyenlet értelmezési tartományában, így az ekvivalens egyenletek miatt pontosan ezek lesznek az eredeti egyenlet megoldásai is.

109. A logaritmus definíciója miatt $x>0$, továbbá

$$\lg x=\lg 10-\lg 2,$$

$$\lg x=\lg\frac{10}{2},$$

$$\lg x=\lg 5.$$

Mivel a pozitív valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto\lg x$ függvény szigorúan monoton, ezért a megoldás: $x=5$. Az ekvivalens egyenletek miatt pontosan ez lesz az eredeti egyenlet megoldása is.

110. A logaritmus definíciója és azonosságai miatt $x>0$, továbbá

$$\log_3 x=2\left(\log_3 3-\log_3 2\right),$$

$$\log_3 x=2\log_3\frac{3}{2},$$

$$\log_3 x=\log_3\frac{9}{4}.$$

Mivel az $x>0$, $x\mapsto\log_3 x$ függvény szigorúan monoton, ezért a megoldás: $x=\frac{9}{4}$. Az ekvivalens egyenletek miatt pontosan ez lesz az eredeti egyenlet megoldása is.

111. A logaritmus értelmezése miatt $x>0$ és $5x-4>0$, ahonnan $x>\frac{4}{5}$. A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x\neq 1$. Az egyenlet értelmezési tartománya így:

$$x>\frac{4}{5},\ x\neq 1.$$

A nevezővel való szorzás és logaritmusazonosság miatt:

$$2\lg x=\lg\left(5x-4\right),$$

$$\lg x^2=\lg\left(5x-4\right).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt:

$$x^2=5x-4,$$

$$x^2-5x+4=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1=4$; $x_2=1$. Az egyenlet értelmezési tartománya miatt $x=1$ nem megoldása az eredeti egyenletnek, így az ekvivalens egyenletek miatt pontosan $x=4$ lesz az eredeti egyenlet megoldása.

112. A logaritmus értelmezése miatt $x>3$ és $x>2$, ahonnan $x>3$. Logaritmusazonosságot alkalmazva:

$$\log_3\frac{x-3}{x-2}=\log_3 3^{-1}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva:

$$\frac{x-3}{x-2}=\frac{1}{3},$$
$$3x-9=x-2,$$
$$2x=7,$$
$$x=\frac{7}{2}.$$

A kapott szám benne van az értelmezési tartományban, így az ekvivalens egyenletek miatt pontosan ez lesz az eredeti egyenlet megoldása is.

113. A logaritmus értelmezése miatt $x>0$. Mivel azonosság miatt $\lg x^2=2\lg x$, továbbá $\lg^2 x=(\lg x)^2$, így az egyenlet:

$$2\lg x=(\lg x)^2,$$
$$0=\lg x(\lg x-2).$$

Innen

$$\lg x=0,$$
$$x=1$$

vagy

$$\lg x=2,$$
$$x=100.$$

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk a kapott megoldások helyességéről.

114. A logaritmus értelmezése miatt:

$$x<1,$$
$$x-1<0$$

és

$$1-\frac{1}{x}>0,$$
$$\frac{x-1}{x}>0,$$

ezért az értelmezési tartomány a negatív valós számok halmaza.

Logaritmusazonosságot alkalmazva:

$$\log_2\frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}=\log_2 16,$$
$$\log_2\frac{x(1-x)}{x-1}=\log_2 16,$$
$$\log_2(-x)=\log_2 16.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva kapjuk, hogy $x = -16$. A kapott szám benne van az értelmezési tartományban, így az ekvivalens egyenletek miatt pontosan ez lesz az eredeti egyenlet megoldása is.

115. Az egyenlet értelmezési tartománya az $]1; \infty[$ intervallum. Használjuk fel az új alapra való áttérésre és azonos alapú logaritmusok különbségére vonatkozó összefüggéseket!

$$\log_3(x-1) + \log_3(x-1) = 5,$$
$$\log_3(x-1) = 2,5.$$

A definíció alapján:

$$3^{\frac{5}{2}} = x - 1,$$
$$x = 3^{\frac{5}{2}} + 1 = 1 + 9\sqrt{3},$$

ami az értelmezési tartományban van, tehát megoldása az egyenletnek.

116. A logaritmus értelmezése miatt $x > 1$; $x > -3$, így az értelmezési tartomány: $x > 1$. Azonosságot alkalmazva:

$$\lg\sqrt{(x-1)(2x+6)} = \lg(x+3).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva:

$$(x-1)(2x+6) = (x+3)^2,$$

innen:

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1 = -3$; $x_2 = 5$, melyek közül csak $x = 5$ eleme az értelmezési tartománynak, így csakis ez lehet a megoldás. Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

117. Mivel a jobb oldalon a logaritmus definíciója, illetve azonosság miatt:

$$\log_3 2 - \log_3 3 = \log_3 \frac{2}{3},$$

így a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva az eredeti egyenletből

$$\log_8 \log_2(x+9) = \frac{2}{3}.$$

Innen:

$$\log_2(x+9) = 8^{\frac{2}{3}} = 4.$$

A logaritmus értelmezése miatt ebből $x + 9 = 16$, ebből $x = 7$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.

118. A logaritmus értelmezése miatt $x>0$. Térjünk át 2-es alapú logaritmusra! Az áttérési képlet alapján:

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2} \quad \text{és}$$

$$\log_{16} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 16}=\frac{\log_2 x}{4}, \text{ ezért}$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x=7, \text{ ebből } \log_2 x=4,$$

ahonnan $x=16$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.

119. A logaritmus értelmezése miatt $x>0$; $x\neq 1$. Térjünk át 3-as alapú logaritmusra:

$$\log_9 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 9}=\frac{\log_3 x}{2} \quad \text{és} \quad \log_{x^2} 3=\frac{\log_3 3}{\log_3 x^2}=\frac{1}{2\log_3 x}\,!$$

Bevezetve az $a=\log_3 x$ helyettesítést, az eredeti egyenlet:

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{2a}=1.$$

Innen $2a$-val való szorzás, majd rendezés után adódik, hogy

$$a^2-2a+1=0,$$

$$(a-1)^2=0,$$

ahonnan $a=1$, ebből $x=3$.
Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek.

120. A logaritmus értelmezése miatt: $x>0$; $x\neq 1$. Térjünk át 3-as alapú logaritmusra:

$$\log_{\sqrt[4]{x}} x=\frac{\log_3 x}{\log_3 \sqrt[4]{x}}=\frac{4\log_3 x}{\log_3 x}=4 \quad \text{és} \quad \log_{\frac{1}{3}} x=\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}}=-\log_3 x!$$

A kapott egyenlet:

$$\log_3 x+\log_3 x=4,$$

ahonnan azonosságot alkalmazva:

$$\log_3 x=\log_3 9.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva adódik, hogy $x=9$, amely eleme az értelmezési tartománynak, ezért az ekvivalens egyenletek miatt az eredeti egyenlet egyetlen megoldása.

121. A logaritmus értelmezése miatt: $x > 0$; $x \neq 1$. Térjünk át 2-es alapú logaritmusra:

$$\log_4(x+12) = \frac{\log_2(x+12)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+12)}{2} \text{ és } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}!$$

Így

$$\frac{\log_2(x+12)}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 1,$$

$$\log_2(x+12) = \log_2 x^2.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitását felhasználva adódik, hogy

$$x+12 = x^2, \text{ ebből } x^2 - x - 12$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $x_1 = -3$; $x_2 = 4$, melyek közül csak $x = 4$ eleme az értelmezési tartománynak, így csakis ez lehet a megoldás. Behelyettesítve könnyen meggyőződhetünk arról, hogy valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

122. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. A négyzetgyök értelmezése miatt, felhasználva, hogy az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő: $x \geq 1$, ami megadja az értelmezési tartományt.
Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, továbbá mindkét oldalon pozitív számok állnak, ezért ekvivalens egyenlethez jutunk, ha tekintjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát. Azonosságot alkalmazva:

A logaritmus definíciója miatt $x = 10$. Behelyettesítve könnyen meggyőződhetünk arról, hogy valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

123. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, továbbá mindkét oldalon pozitív számok állnak, ezért ekvivalens egyenlethez jutunk, ha tekintjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát.
Azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$(0{,}1 + 0{,}2\lg x)\lg x = \frac{1}{2}\lg x,$$

$$(0{,}1 + 0{,}2\lg x - 0{,}5)\lg x = 0,$$

ahonnan

$$\lg x = 0 \text{ vagy } 0{,}2\lg x = 0{,}4, \text{ ebből } \lg x = 2.$$

A logaritmus definíciója miatt $x = 1$ vagy $x = 100$. Behelyettesítve könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.

124. A logaritmus értelmezése miatt $9^{x-3} > 1$. Felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedését: $x-3>0$, ebből $x>3$. Azonosságokat alkalmazva:

$$\lg\left[10\left(3^{x-3}+15\right)\right]=\lg\left[3\left(9^{x-3}-1\right)\right].$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedése miatt

$$10\left(3^{x-3}+15\right)=3\left(9^{x-3}-1\right).$$

Legyen $3^{x-3}=a\ (a>0)$! Ekkor

$$10a+150=3a^2-3,$$
$$0=3a^2-10a-153.$$

Ennek megoldásai $a_1=9$ és $a_2=-\frac{17}{3}$. Csak a pozitív érték jöhet szóba:

$$3^{x-3}=3^2.$$

Felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedését.

$$x=5.$$

Ez eleme az értelmezési tartománynak, ezért az ekvivalens egyenletek miatt az eredeti egyenlet egyetlen megoldása.

125. Összeadva az egyenleteket:

$$2\log_2 x=8,$$
$$\log_2 x=4,$$
$$x=16.$$

Így akkor

$$\log_2 y=1,$$
$$y=2.$$

Behelyettesítéssel könnyű meggyőződni a kapott megoldás helyességéről.

126. Legyen $\lg x=a;\ \lg y=b$! Ekkor az egyenletrendszer:

$$\begin{cases}2a+3b=-1,\\5a+2b=3.\end{cases}$$

Az első egyenlet (-2)-szereséhez hozzáadva a második egyenlet 3-szorosát:

$$11a=11,$$
$$a=1,\text{ ebből } b=-1,$$

ahonnan

$$x=10;\ y=0{,}1.$$

Behelyettesítéssel könnyű meggyőződni a kapott megoldás helyességéről.

127. A logaritmus definíciója miatt $x > 0$; $y > 0$. A második egyenlet miatt $x = 10y + 900$, ezért az első egyenletben logaritmusazonosságot alkalmazva:

$$\lg\frac{10y+900}{y} = 2,$$

$$\frac{10y+900}{y} = 100,$$

$$900 = 90y,$$

$$10 = y, \text{ ebből } x = 1000.$$

Behelyettesítéssel könnyű meggyőződni a kapott megoldás helyességéről.

128. A logaritmus értelmezése miatt x és y pozitív szám. Az első egyenletben áttérve 4-es alapra:

$$\log_4 x = 2\log_4 y,$$

$$\log_4 x = \log_4 y^2.$$

Felhasználva a logaritmusfüggvény szigorúan monoton tulajdonságát:

$$x = y^2.$$

A második egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

melynek megoldásai $x = 1$, $x = 4$.
Az egyenletrendszer megoldásai ezért $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ és $x_2 = 4$; $y_2 = 2$.
Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk a kapott megoldások helyességéről.

129. A logaritmus értelmezése miatt x; y és z pozitív szám. Az egyenletekben áttérve 4-es, 9-es, illetve 16-os alapú logaritmusra:

$$\begin{cases} 2\log_4 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_9 x + 2\log_9 y + \log_9 z = 2, \\ \log_{16} x + \log_{16} y + 2\log_{16} z = 2. \end{cases}$$

Azonosságok felhasználásával:

$$\begin{cases} \log_4\left(x^2yz\right) = 2, \\ \log_9\left(xy^2z\right) = 2, \\ \log_{16}\left(xyz^2\right) = 2. \end{cases}$$

Innen a definíció miatt:

$$\begin{cases} x^2yz = 16, \\ xy^2z = 81, \\ xyz^2 = 256. \end{cases}$$

Összeszorozva az egyenleteket adódik, hogy

$$(xyz)^4=(2\cdot 3\cdot 4)^4, \text{ ebből } xyz=24.$$

Az egyenletrendszer utolsó alakjában szereplő egyenleteket elosztva xyz-vel megkapjuk az ismeretlenek értékeit: $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{27}{8}$; $z=\frac{32}{3}$.

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk.

130. Mivel a pozitív valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton, továbbá az első egyenletben mindkét oldalon pozitív számok állnak, így az első egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk, ha vesszük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\left(x^2+7x+12\right)\lg y=0.$$

Innen $$x^2+7x+12=0 \text{ vagy } y=1.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=-3$; $x_2=-4$. Az egyenletrendszer megoldásai ezért: $x_1=-3$; $y_1=9$; $x_2=-4$; $y_2=10$; $x_3=5$; $y_3=1$.

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk a kapott megoldások helyességéről.

131. A logaritmus értelmezése miatt $x+y>0$ és $x-y>0$. Az egyenleteket átalakíthatjuk a hatványozás és a logaritmus azonosságainak figyelembevételével az alábbiak szerint:

$$\begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}}=5^{2y-x}, \\ \log_4\left(x^2-y^2\right)=2. \end{cases}$$

Felhasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát, valamint a logaritmus definícióját:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=2y-x, \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$$

Az első egyenletből adódó $y=\frac{3}{5}x$ összefüggést a másodikba beírva:

$$x^2-\frac{9}{25}x^2=16,$$

$$x^2=25,$$

ahonnan

$$x_1=5, \text{ ebből } y_1=3, \text{ illetve } x_2=-5, \text{ ebből } y_2=-3,$$

azonban ez utóbbi számpár nem felel meg a feltételeknek, így nem lesz megoldása az eredeti egyenletrendszernek. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a fenti első megoldás helyességéről.

132. A logaritmus értelmezése miatt x és y csak pozitív számok lehetnek. Felhasználva a logaritmus definícióját az első egyenletet átalakíthatjuk a következő módon:

$$\log_5 x + y = 2,$$
$$\log_5 x = 2 - y,$$
$$x = 5^{2-y}.$$

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(5^{2-y}\right)^y = 5^{-3};$$
$$5^{-y^2+2y} = 5^{-3}.$$

Felhasználjuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.

$$y^2 - 2y = 3;$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $y_1 = 3$, amiből $x_1 = \frac{1}{5}$ és $y_2 = -1$, de ez utóbbi nem lehetséges.
Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk a kapott megoldás helyességéről.

133. Az értelmezési tartomány: $x > 0$ és $y > 0$.

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y^4 = 12, \\ \log_3\left(xy^3\right) = 6. \end{cases}$$

Az értelmezési tartományon (a logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot használva) ez ekvivalens a következővel:

$$\begin{cases} \log_3\left(xy^2\right) = 12, \\ \log_3\left(xy^3\right) = 6. \end{cases}$$

Ebből a logaritmus definíciója miatt:

$$\begin{cases} \left(xy^2\right) = 3^{12}, \\ \left(xy^3\right) = 3^6. \end{cases}$$

Az első egyenletet osztva a másodikkal, a következőt kapjuk: $\frac{1}{y} = 3^6$, azaz $y = 3^{-6}$, ebből $x = 3^{24}$. Mindkettőről ellenőrizhető, hogy az értelmezési tartományban van.

134. A logaritmus definíciója miatt $x > 2$. Mivel a 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, továbbá $1 = \log_3 3$, ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség ekvivalens a következővel: $x - 2 < 3$, ahonnan $x < 5$.
Az eredeti egyenlőtlenségnek tehát azok az x valós számok megoldásai, melyekre: $2 < x < 5$.

135. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. A négyzetgyök definíciója miatt $\log_{0,5} x \geq 0$ kell hogy teljesüljön.
Mivel $0 = \log_{0,5} 1$; továbbá a 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért az értelmezési tartomány: $0 < x \leq 1$.

136. A logaritmus értelmezése miatt $x - 2 > 0$. Mivel $\log_{0,2} 0,2 = 1$; továbbá a 0,2 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért $x - 2 \leq 0,2$, ebből $x \leq 2,2$; következésképpen: $2 < x \leq 2,2$.

137. A logaritmus értelmezése miatt $\frac{x-3}{4-x} > 0$, ebből $3 < x < 4$.
Mivel a pozitív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő és $\lg 1 = 0$; ezért

$$\frac{x-3}{4-x} < 1;$$

$$\frac{x-3-4+x}{4-x} < 0;$$

$$\frac{2x-7}{4-x} < 0,$$

ahonnan $x > 4$ vagy $x < \frac{7}{2}$.
Összevetve az értelmezési tartománnyal adódik, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $3 < x < \frac{7}{2}$.

138. A logaritmus értelmezése miatt $\frac{x+3}{2x-1} > 0$, ebből $x > \frac{1}{2}$ vagy $x < -3$.
Mivel $0 = \log_{0,5} 1$; továbbá a 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért:

$$\frac{x+3}{2x-1} \leq 1;$$

$$\frac{x+3-2x+1}{2x-1} \leq 0;$$

$$\frac{4-x}{2x-1} \leq 0;$$

ahonnan

$$x \geq 4 \text{ vagy } x < \frac{1}{2}.$$

Összevetve az értelmezési tartománnyal adódik, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x \geq 4$ vagy $x < -3$.

139. A logaritmus értelmezése miatt

$$6x^2 - x - 1 > 0;$$

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0;$$

ahonnan

$$x > \frac{1}{2} \text{ vagy } x < -\frac{1}{3}.$$

Felhasználtuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakját.
A négyzetgyök értelmezése miatt

$$\log_{0,5}\left(6x^2 - x - 1\right) \geq 0.$$

Mivel $0 = \log_{0,5} 1$; továbbá a 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$6x^2 - x - 1 \leq 1;$$

$$6x^2 - x - 2 \leq 0;$$

$$6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

ahonnan

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

Felhasználtuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakját.

Összevetve a két egyenlőtlenséget adódik a megoldás: $-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3}$ vagy $\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$.

140. Térjünk át 10-es alapú logaritmusra! Kapjuk, hogy

$$\log_2 2007 = \frac{\lg 2007}{\lg 2}; \ \log_{2007} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 2007}.$$

Vegyük észre, hogy ezek a pozitív számok egymás reciprokai, valamint jelöljük egyiküket a-val! Elegendő belátnunk, hogy $a + \frac{1}{a} > 2$.
Ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha a-val szorzunk, hiszen $a > 0$:

$$a^2 + 1 > 2a;$$

$$a^2 - 2a + 1 > 0;$$

$$(a-1)^2 > 0;$$

ami igaz, hiszen $a \neq 1$.
Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is igazoltuk.

Megjegyzés:
Hivatkozhattunk volna a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre is.

141. Térjünk át 10-es alapú logaritmusra! Azt kapjuk, hogy

$$\log_4 5 = \frac{\lg 5}{\lg 4};\ \log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5};\ \log_6 7 = \frac{\lg 7}{\lg 6};\ \log_7 8 = \frac{\lg 8}{\lg 7}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség kétváltozós alakját alkalmazva:

$$\log_4 5 + \log_5 6 > 2\sqrt{\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 5}} = 2\sqrt{\frac{\lg 6}{\lg 4}};$$

$$\log_6 7 + \log_7 8 > 2\sqrt{\frac{\lg 7}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 7}} = 2\sqrt{\frac{\lg 8}{\lg 6}}.$$

Ismét alkalmazva:

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 2\sqrt{\frac{\lg 6}{\lg 4}} + 2\sqrt{\frac{\lg 8}{\lg 6}} > 2\sqrt{4\cdot\sqrt{\frac{\lg 6}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 6}}};$$

$$2\sqrt{\frac{\lg 6}{\lg 4}} + 2\sqrt{\frac{\lg 8}{\lg 6}} > 4\sqrt[4]{\frac{\lg 8}{\lg 4}} = 4\sqrt[4]{\frac{3\lg 2}{2\lg 2}} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

A feladatban szereplő egyenlőtlenség bizonyításához elegendő belátnunk, hogy

$$\sqrt[4]{\frac{3}{2}} > 1{,}1.$$

Negyedik hatványra emelve: $1{,}5 > 1{,}4641$, ami igaz.

Megjegyzés:
Hivatkozhattunk volna a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség négy változóra felírt alakjára is.

142. Vegyük észre, hogy $2\cdot 3\cdot 5 = 30$; ezért $\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = \log_{30}(2\cdot 3\cdot 5) = 1$.
Vezessük be a $\log_{30} 2 = a$; $\log_{30} 3 = b$; $\log_{30} 5 = c$ jelöléseket!
A fentiek miatt elegendő megmutatnunk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 > (a+b+c)^2;$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca;$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca > 0;$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0.$$

Ez nyilván igaz, hiszen a, b és c páronként különbözők! Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés:
Hivatkozhattunk volna a négyzetes és számtani közepek közötti egyenlőtlenség három változóra felírt alakjára is.

143. Áttérve 2-es alapra a logaritmusban:

$$-\log_2(x+2) \le -4,\ x+2>0;\ x>-2,$$

$$\log_2(x+2) \ge 4,$$

$$\log_2(x+2) \ge \log_2 16.$$

Ez pedig pontosan akkor teljesül (felhasználva a 2-es alapú logaritmus függvény szigorú monoton növekedését):

$$x+2 \ge 16,$$

$$x \ge 14.$$

2. Trigonometria – megoldások

2.1. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

144. A háromszög harmadik szöge 70°-os. A szinusztétel alapján:

$$\frac{a}{14}=\frac{\sin 25°}{\sin 85°}\text{, ebből } a=5,94 \text{ cm;}$$

$$\frac{b}{14}=\frac{\sin 70°}{\sin 85°}\text{, ebből } b=13,21 \text{ cm.}$$

145. A hiányzó két szög összege $\beta+\gamma=150°$;

$\beta=x,\ \gamma=2x$, ebből $x=50°$; $\beta=50°$; $\gamma=100°$.

A szinusztétel alapján: $\frac{b}{20}=\frac{\sin 50°}{\sin 30°}$, ebből $b=30,64$ cm;

$$\frac{c}{20}=\frac{\sin 100°}{\sin 30°}\text{, ebből } c=39,39 \text{ cm.}$$

146. A két ismert oldalra alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{15}{10}=\frac{\sin\beta}{\sin 27°}\text{, ebből } \sin\beta=0,6810;$$

amiből $\beta=42,92°$ vagy $\beta=137,08°$. A második lehetőség nem fordulhat elő, ugyanis a szöveg alapján β csak a második legnagyobb szöge a háromszögnek. Azaz $\beta=42,92°$. Így $\gamma=180°-(\alpha+\beta)=110,08°$.

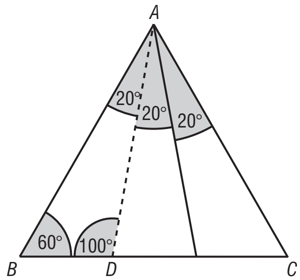
147. A háromszög három szöge: $\alpha=47°$; $\beta=62°$; $\gamma=71°$. A két oldal különbsége: $b-a=6$. A szinusztétel alapján:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin 62°}{\sin 47°}=1,207\text{, ebből } b=1,207a.$$

Ezt a különbségre vonatkozó összefüggésbe helyettesítve:

$$b-a=0,207a=6\text{, ebből } a=28,99 \text{ cm.}$$

148. Tekintsük át az ábrát!



Az $ABC\triangle$ A-csúcsából kiinduló egyik szögharmadoló a szemközti BC oldalt D-ben metszi, $DAB\sphericalangle = 20°$. Az $ABD\triangle$ szögei $20°$, $60°$, $100°$ nagyságúak. A szinusztételt felírva meghatározzuk BD-t:

$$\frac{BD}{25} = \frac{\sin 20°}{\sin 100°}, \text{ ebből } BD = 8{,}68 \text{ cm.}$$

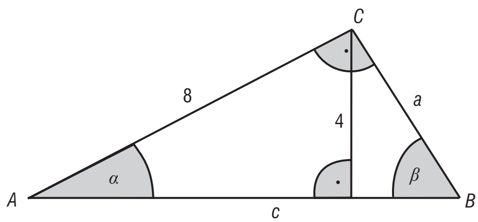
A szimmetria miatt nyilván a három szakasz közül még egy ugyanilyen hosszú, a harmadik (a középső) pedig: $25 - 2 \cdot 8{,}68 = 7{,}64$ cm hosszú.

149. Legyen az a hosszúságú befogóval szemközti szög $\alpha = 30°$, valamint jelölje b a másik befogó hosszát! Ekkor

$$\sin 30° = \frac{a}{8}, \text{ ebből } a = 8\sin 30° = 4 \text{ cm;}$$

$$\cos 30° = \frac{b}{8}, \text{ ebből } b = 8\cos 30° = 6{,}93 \text{ cm.}$$

150. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Az ábra alapján:

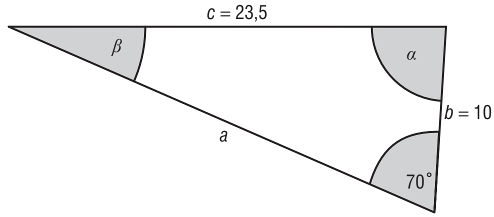
$$\sin\alpha = \frac{4}{8}, \text{ ebből } \alpha = 30° \text{ és } \beta = 60°;$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{c}, \text{ ebből } c = \frac{8}{\cos\alpha} \approx 9{,}24 \text{ cm.}$$

Így a terület:

$$T = \frac{c \cdot m}{2} \approx 18{,}48 \text{ cm}^2.$$

151. Legyen $\gamma = 70°$; $b = 10$ cm; $c = 23,5$ cm!



A szinusztétel alapján:

$$\frac{10}{23,5} = \frac{\sin\beta}{\sin 70°}, \text{ ebből } \sin\beta = 0,4, \text{ ebből } \beta = 23,6° \quad \text{vagy} \quad \beta = 156,4°$$

és ez utóbbi nem lehetséges.

Azaz $\beta = 23,6°$, ebből $\alpha = 86,4°$, ebből $a = 10 \cdot \dfrac{\sin 86,4°}{\sin 23,6°} = 24,93$ cm.

152. A háromszög szögeire $\alpha \le \beta \le \gamma$, mivel egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ezért felírható: $\alpha = \beta - d$; $\gamma = \beta + d$; amiből

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta - d + \beta + \beta + d = 3\beta = 180°, \text{ ebből } \beta = 60°.$$

A szinusztételt felírva a két rövidebb oldalra:

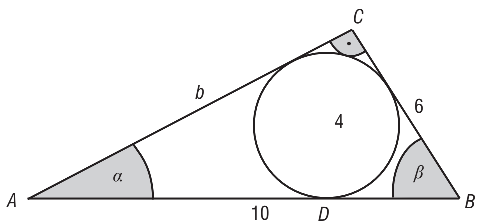
$$\frac{5}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sin 60°}, \text{ ebből } \alpha = 38,2°;$$

mivel α kisebb mint β. Így $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 81,8°$.

A hiányzó oldal meghatározásához ismét a szinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \text{ ebből } \frac{c}{7} = \frac{\sin 81,8°}{\sin 60°}, \text{ ebből } c = 8 \text{ cm}.$$

153. Az alábbi ábrán D jelöli a beírt kör érintési pontját az átfogón. Legyen r a beírt kör sugara!



Az ábra alapján:

$$\cos\beta = \frac{6}{10}, \text{ ebből } \beta = 53,13°.$$

A Pitagorasz-tételből:

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}.$$

A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét felhasználva:

$$10 = 6 - r + 8 - r, \text{ ebből } r = 2 \text{ cm.}$$

154. A feladat szövege alapján $\alpha = 5x$; $\beta = 6x$; $\gamma = 7x$. Így

$$5x + 6x + 7x = 180°, \text{ ebből } x = 10°; \text{ azaz } \alpha = 50°; \ \beta = 60°; \ \gamma = 70°.$$

Az oldalak aránya a szinusztétel alapján:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \text{ ebből } a = 0,7660y; \ b = 0,8660y; \ c = 0,9397y.$$

Így a kerületet ismerve:

$$0,7660y + 0,8660y + 0,9397y = 100, \text{ ebből } y = 38,88 \text{ cm.}$$

Azaz a legrövidebb oldal hossza: $a = 29,79$ cm.

155. A mértani sorozat definíciója alapján:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + 1,5\alpha + (1,5)^2 \cdot \alpha = 180°, \text{ ebből } \alpha = 37,89°; \ \beta = 56,84°; \ \gamma = 85,25°.$$

A szinusztételt alkalmazva: $\dfrac{c}{11} = \dfrac{\sin 85,25°}{\sin 37,89°}$, ebből $c = 17,85$ cm.

156. A háromszög területe a két esetben egyenlő

$$T = \frac{27 \cdot 38 \cdot \sin 37°}{2} = \frac{27 \cdot 38 \cdot \sin 143°}{2} \approx 308,73 \text{ mm}^2.$$

157. A területből $\sin\alpha = \dfrac{2 \cdot 75}{12 \cdot 25} = \dfrac{1}{2}$, ebből $\alpha = 30°$ vagy $\alpha = 150°$.

158. $T = 28 \cdot 82 \cdot \sin 111° \approx 2143,5 \text{ mm}^2$.

159. Használjuk a $T = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ összefüggést!

a) $T = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$;

b) $T = 28\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 28$.

160. A trapéz két átlójának hajlásszöge 60°, így az előző összefüggést felhasználva

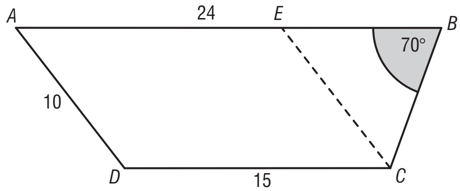
$$T = \frac{13^2 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{169\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

161. $T = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot \sin 103,47°}{2} + \dfrac{9 \cdot 10 \cdot \sin 76,53°}{2} \approx 71.$

162. A középponti szögek: 60°, 80°, 100°, 120°. A négyszög területe egyenlő a 4 középponti háromszög területének összegével.

$$T = \frac{r^2}{2}\left(\sin 60° + \sin 80° + \sin 100° + \sin 120°\right) = 64\left(\sin 60° + \sin 80°\right) \approx 118,45\ \text{cm}^2.$$

163.



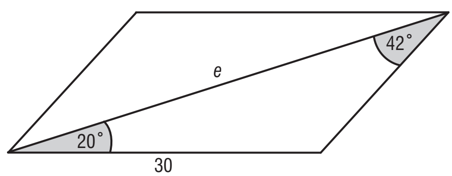
Az $ABCD$ trapéz hosszabbik alapja $AB = 24$ cm, a rövidebb alap $CD = 15$ cm, az AD szár hossza 10 cm, továbbá $CBA\sphericalangle = 70°$. Az AD szárral C-n át húzott párhuzamos egyenes az AB alapot E-ben metszi. Az EBC háromszögben $EB = 24 - 15 = 9$ cm és $EC = AD = 10$ cm. Erre a háromszögre alkalmazva a szinusztételt (felhasználjuk, hogy a $BCE\sphericalangle$ kisebb, mint 70°, ugyanis a vele szemközti oldal kisebb, mint a 70°-os szöggel szemközti oldal):

$\dfrac{\sin BCE\sphericalangle}{\sin 70°} = \dfrac{9}{10}$, ebből $BCE\sphericalangle = 57,75°$, ebből $BEC\sphericalangle = 180° - (70° + 57,75°) = 52,25°$.

Így újra alkalmazva a szinusztételt: $\dfrac{BC}{10} = \dfrac{\sin 52,25°}{\sin 70°}$, ebből $BC = 8,4$ cm.

164. A hosszabbik átló és a két oldal által meghatározott tompaszögű háromszög két hegyesszöge 20°-os és 42°-os. Azaz a tompaszög $180° - (20° + 42°) = 118°$. Így a szinusztételt alkalmazva erre a háromszögre, az átlót e-vel jelölve:

$$\frac{e}{30} = \frac{\sin 118°}{\sin 42°},\ \text{ebből } e = 39,59\ \text{cm}.$$



165. Az átló és a két oldal által meghatározott tompaszögű háromszög szögei 18°, 47° és $180° - (18° + 47°) = 115°$ nagyságúak.

A szinusztételt alkalmazva meghatározzuk az oldalak hosszúságát:

$$\frac{a}{15} = \frac{\sin 18°}{\sin 115°},\ \text{ebből } a = 5,11\ \text{cm},\ \text{és}\ \frac{b}{15} = \frac{\sin 47°}{\sin 115°},\ \text{ebből } b = 12,1\ \text{cm}.$$

Így a paralelogramma területe: $T = a \cdot b \cdot \sin\varphi = 56{,}04\ \text{cm}^2$ (ahol φ jelöli a paralelogramma egyik szögét, ami 65°).

166. A koszinusztételt felhasználva a harmadik oldal hossza:

$$c^2 = 19^2 + 26^2 - 2 \cdot 19 \cdot 26 \cdot \cos 58°, \text{ ebből } c = 22{,}66 \text{ cm.}$$

167. A koszinusztételt felírva adódik:

$$48^2 = 35^2 + c^2 - 2 \cdot 35 \cdot c \cdot \cos 62°\,;$$

mely másodfokú egyenletet megoldva c-re azt kapjuk: $c_1 = 53{,}16$ és $c_2 = -20{,}3$. A két megoldás közül csak az első lesz megfelelő, azaz a háromszög harmadik oldala 53,16 cm hosszú.

168. A koszinusztételt felhasználva:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\alpha = \frac{17^2 + 26^2 - 13^2}{2 \cdot 17 \cdot 26} = 0{,}9005,$$

$$\alpha = 25{,}78°.$$

169. Az oldalhosszúságok: 3 cm, 5 cm, 7 cm.
A koszinusztételt felhasználva a legnagyobb szögre:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos\gamma = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -0{,}5,$$

$$\gamma = 120°.$$

170. A koszinusztételt és a mértani sorozat definícióját felhasználva:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + (1{,}2 \cdot a)^2 - (1{,}2^2 \cdot a)^2}{2 \cdot a \cdot (1{,}2 \cdot a)} = \frac{0{,}3664 \cdot a^2}{2{,}4 \cdot a^2} = 0{,}1527,$$

$$\gamma = 81{,}22°.$$

171. A háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}, \text{ ebből } \sin\gamma = \frac{2T}{ab} = 0{,}8824$$

és mivel a háromszög hegyesszögű, ezért $\gamma = 61{,}93°$.

A koszinusztétel alapján a c oldal:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=19,21\ \text{cm}.$$

Így a háromszög kerülete: $K=56,21$ cm.

172. A súlyvonal hossza a háromszög oldalainak hosszából meghatározható:

$$s_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}.$$

Ide beírva az ismert adatokat a hiányzó c oldal meghatározható:

$$38=\frac{\sqrt{2\cdot 32^2+2\cdot 46^2-c^2}}{2},$$

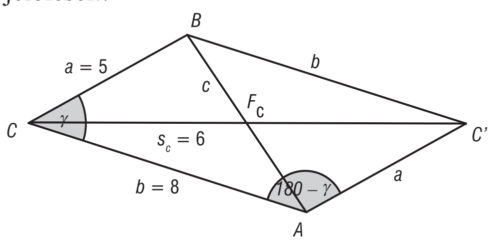
$$c=\sqrt{504}\approx 22,45\ \text{cm}.$$

A háromszög legkisebb szöge a legrövidebb oldallal szemközti szög, ami jelen esetben γ.

A koszinusztétel segítségével határozzuk meg:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0,8954,\ \text{ebből}\ \gamma=26,44°.$$

173. Használjuk az ábra jelöléseit!



Tükrözzük a C csúcsot a BA szakasz felezőpontjára! Ekkor az $AC'BC$ négyszög egy paralelogramma, így a paralelogramma tulajdonságok használhatók. Az $AC'C$ háromszögben a koszinusztétel:

$4s_c^{\,2}=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\gamma)=a^2+b^2+2ab\cos\gamma.$

Az ABC háromszögben a koszinusztétel alkalmazásával kapható, hogy

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Ezt behelyettesítve az előző egyenletbe adódik, hogy $s_c^{\,2}=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

(Ez megjegyzésre érdemes eredmény.)

Helyettesítsük be a kapott egyenletbe az ismert adatokat!

$$6^2=\frac{2\cdot 5^2+2\cdot 8^2-c^2}{4}$$

Ebből $c=\sqrt{34}\approx 5,83$.

a) A háromszög szögeit a koszinusztétellel határozhatjuk meg:

$$\cos\gamma = \frac{5^2+8^2-34}{80} = 0,6875,\ \gamma \approx 46,57°$$

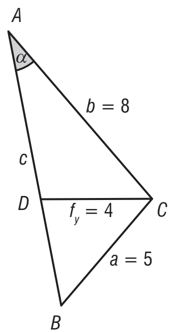
$$\cos\beta = \frac{5^2+34-8^2}{10\sqrt{34}} \approx -0,0857,\ \beta \approx 94,92°$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 38,51°$$

b) A háromszög köré írt kör sugara: $r = \dfrac{abc}{4T}$, ahol a T a háromszög területe, ami

c) a Heron-képlettel számolható: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a háromszög kerületének fele. $T \approx 14,52$, $r \approx 4,01$. A terület a trigonometrikus területképlettel is számolható: $T = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$.

174. Tekintsük a mellékelt ábrát!



A szögfelezőtétel szerint $AD = \dfrac{bc}{a+b}$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az ABC háromszögben! Azt kapjuk, hogy $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Alkalmazzuk újra a koszinusztételt az ACD háromszögben, és használjuk az előbbieket!

$$f_\gamma^{\,2} = b^2 + AD^2 - 2AD \cdot b \cdot \cos\alpha =$$

$$= b^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - 2\frac{bc}{a+b} b \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$= b^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{b\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a+b} =$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}\left[b(a+b)^2 + bc^2 - (a+b)\left(b^2+c^2-a^2\right)\right] =$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}\left(a^2b + 2ab^2 + b^3 + bc^2 - ab^2 - ac^2 + a^3 - b^3 - bc^2 + a^2b\right) =$$

$$= \frac{ab\left(a^2+2ab+b^2-c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{ab\left((a+b)^2-c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2}.$$

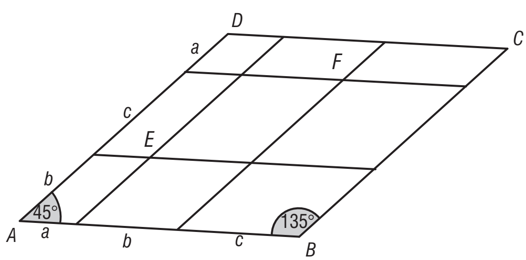
(Egy önmagában is érdekes eredmény.)
Helyettesítsük be a kapott egyenletbe az ismert adatokat!

$$16 = \frac{40\left(169-c^2\right)}{169},$$

$$c^2 = 101,4.$$

Mivel c pozitív, $c \approx 10,07$.
A Heron-képletből a háromszög területe: $T \approx 19,76$. A háromszög kerületének a fele: $s = 11,54$. A háromszög beírt körének sugara: $\rho = \frac{T}{s} \approx 1,71$.

175. Tekintsük az ábrát! Az ábrán látható négyszögek paralelogrammák.



A koszinusztétel alapján:

$AE=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 135°}=$

$=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}.$

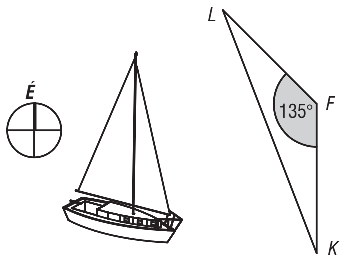
Hasonlóképpen:

$EF=\sqrt{b^2+c^2+bc\sqrt{2}},$

$FC=\sqrt{c^2+a^2+ca\sqrt{2}}.$

Ugyanakkor $AC^2=2(a+b+c)^2-2(a+b+c)^2\cos 135°=(a+b+c)^2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right),$
azaz $AC=(a+b+c)\sqrt{2+\sqrt{2}}.$
Látható, hogy a feladat állítása: $AE+EF+FA\geq AC.$ Ez pedig nyilvánvaló.

176.



Jelölje e azt az utat, amit 1 csomó sebességgel haladva 1 óra alatt teszünk meg! Az ábrán K jelöli a kikötőt, L a lakatlan szigetet, F pedig azt a pontot, ahol a hajó irányt változtatott. Keressük a KL szakasz hosszát. A $KFL\triangle$ KF oldala $3\cdot 15e=45e$, az FL oldal pedig $2\cdot 20e=40e$ hosszúságú. Alkalmazva a koszinusztételt kapjuk, hogy

$$KL=\sqrt{(45e)^2+(40e)^2-2\cdot(45e)\cdot(40e)\cos 135°}=78{,}55e,$$

amit a galamb 80 csomó sebességgel repülve 0,98 óra alatt tesz meg, és mivel 20:00-kor indult, ezért kb. 20:59-kor érkezik a kikötőbe.
A másik kérdés az $LKF\sphericalangle$-re vonatkozik. Használjuk a szinusztételt:

$$\frac{\sin LKF\sphericalangle}{\sin 135°}=\frac{40e}{78{,}55e}\approx 0{,}3601;$$

amiből a keresett hegyesszög: $LKF\sphericalangle\approx 21{,}1°.$

177. Jelölje a, b és c a háromszög oldalait, és legyen $c=40$ cm továbbá $\gamma=60°$! A feladat alapján $b-a=5$, azaz a koszinusztételt felírva kapjuk:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\quad 40^2=a^2+(a+5)^2-2a(a+5)\cos 60°;$$

amiből rendezéssel az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$$a^2+5a-1575=0;$$

mely egyenlet megoldásai: $a_1=37{,}26$ és $a_2=-42{,}26$, ahol csak az első lesz a megoldása a feladatnak.

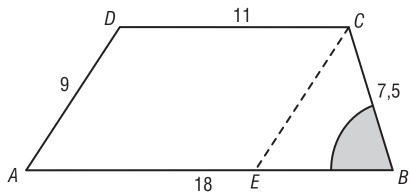
Így a háromszög hiányzó oldalai: $a = 37,26$ cm és $b = a + 5 = 42,26$ cm hosszúak. A hiányzó szögeket pedig például a koszinusztételből határozhatjuk meg:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \text{azaz}\ \alpha = 53,78°;$$

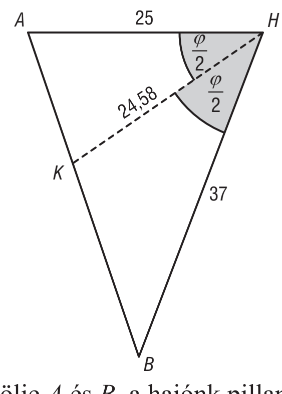
$$\text{míg}\ \beta = 180° - (\alpha + \gamma) \approx 66,22°.$$

178. Jelölje a trapéz csúcsait A, B, C, D, továbbá legyen $AB = 18$ cm, $CD = 11$ cm, $BC = 7,5$ cm és $AD = 9$ cm! Húzzunk párhuzamost AD-vel C-n keresztül, és az AB-vel alkotott metszéspontját jelölje E! Az $EBC\triangle$-ben a konstrukció miatt az $EB = 18 - 11 = 7$ cm és $EC = AD = 9$ cm. Így a háromszög mindhárom oldalát ismerjük, azaz a koszinusztétel segítségével tetszőleges szögét meghatározhatjuk, így a kérdéses $EBC\sphericalangle$-et is:

$$\cos EBC\sphericalangle = \frac{7^2 + 7,5^2 - 9^2}{2\cdot 7\cdot 7,5} = 0,2309,\ \text{ebből}\ EBC\sphericalangle = 76,65°.$$



179.



A világítótornyok helyét jelölje A és B, a hajónk pillanatnyi helyét pedig H! Az AB szakaszon a kikötő helyét jelölje K! Így HK az $AHB\sphericalangle$ szögfelezője. Jelölje az $AHB\sphericalangle$ szöget φ! A szögfelezőtétel alapján:

$$AK : BK = AH : BH = 25 : 37\ \text{ebből}\ AK = 25x,\ BK = 37x.$$

A koszinusztételt felírva az AHK és BHK háromszögekre:

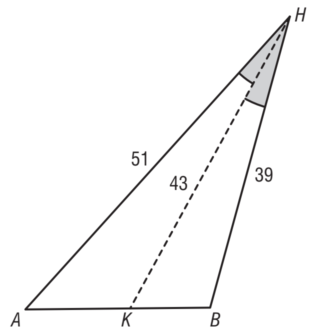
$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{25^2 + 24,58^2 - (25x)^2}{2\cdot 25\cdot 24,58} = \frac{37^2 + 24,58^2 - (37x)^2}{2\cdot 24,58\cdot 37}.$$

Ebből rendezés után adódik, hogy $x = 0,5889$ km, amiből

$$AB = 25x + 37x = 36,51 \text{ km}.$$

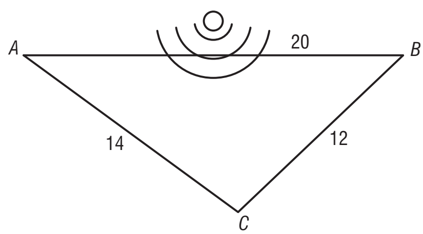
Ezt az utat $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel $\frac{36,51}{40} = 0,9128$ óra, azaz 54 perc és 46 másodperc alatt teheti meg a toronyőr.

180.



Az előző feladattal megegyező módon számolható, a minimálisan szükséges idő: 23 perc és 53 másodperc.

181.



A tornyot a három település (A, B, C) által meghatározott háromszög körülírt körének középpontjába építik, ugyanis ez az a pont a síkon, amelyik a három csúcstól egyenlő távolságra van. A körülírt kör sugarát meghatározhatjuk például az alábbi összefüggés segítségével:

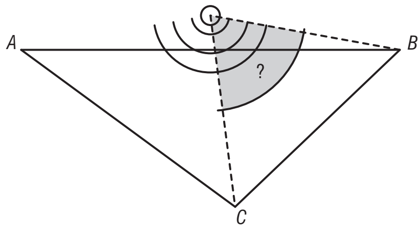
$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Azaz csak a háromszög egy szögét kell kiszámolnunk. Ezt a koszinusztétel segítségével tesszük:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{14^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 14 \cdot 20} = 0,8071, \text{ ebből } \alpha = 36,2°.$$

Így $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = 10,16$ km, és a berendezésnek legalább ekkora hatósugarúnak kell lenni.

182.

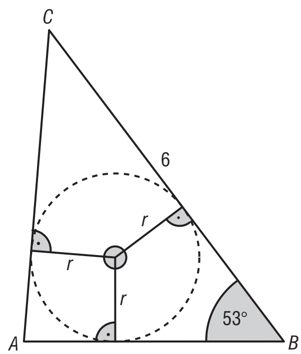


A tornyot a három település (A, B, C) által meghatározott háromszög körülírt körének középpontjába építik, ugyanis ez az a pont a síkon, amelyik a három csúcstól egyenlő távolságra van. A kérdezett szög a háromszög legrövidebb oldalával szemközti szögének a kétszerese (középponti-kerületi szögek tétele), azaz 2α. Az α meghatározása a koszinusztétel segítségével:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0,8333, \text{ ebből } \alpha = 33,56°;$$

azaz a kérdéses szög: $2\alpha = 67,12°$.

183.



A les helye a három település által meghatározott háromszög beírt körének középpontja, a kérdezett távolság pedig e kör sugara, ami az alábbi összefüggés segítségével számolható: $r = \frac{2T}{K}$. A háromszög területe:

$$T = \frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2} = \frac{4\cdot 6\cdot \sin 53°}{2} = 9,58\ \text{km}^2.$$

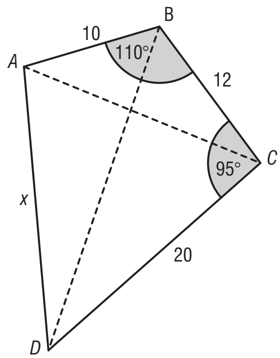
A kerület kiszámításához a hiányzó oldal hosszát kell kiszámítanunk, amit koszinusztétellel tehetünk meg:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = 4,81\ \text{km}.$$

Azaz $K = 4+6+4,81 = 14,81$ km. Így a beírt kör sugara, azaz a kérdezett távolság: $r = \frac{2T}{K} = 1,29$ km.

2.2. Forgásszögek szögfüggvényei

184.



Először meghatározzuk a BD átló hosszát a BCD háromszögben felírt koszinusztétel segítségével: $BD=\sqrt{12^2+20^2-2\cdot 12\cdot 20\cdot\cos 95°}=24,2$ m.
Ugyanebben a háromszögben a $DBC\sphericalangle$ szinusztétellel számolható:

$$\frac{\sin DBC\sphericalangle}{\sin 95°}=\frac{20}{24,2}\text{, ebből } \sin DBC\sphericalangle=0,8233$$

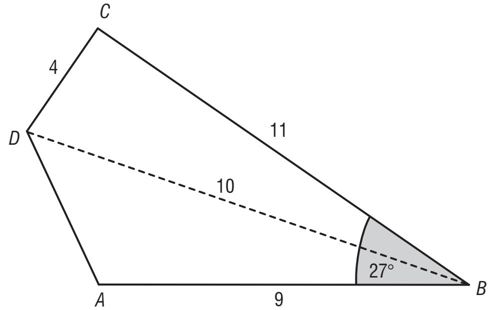
és mivel $DBC\sphericalangle$ hegyesszög, ezért $DBC\sphericalangle=55,42°$.
Így $DBA\sphericalangle=110°-55,42°=54,58°$, amiből a DBA háromszögben koszinusztétellel a kérdéses AD hosszára $AD=\sqrt{10^2+24,2^2-2\cdot 10\cdot 24,2\cdot\cos 54,58°}=20,13$ m adódik.

185. Először koszinusztétellel meghatározzuk a BCD háromszögben a $DBC\sphericalangle$-et:

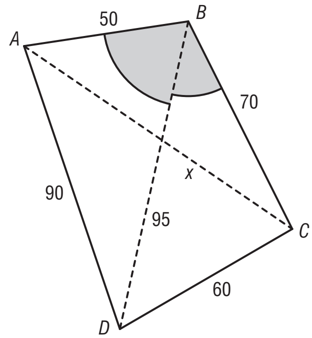
$$\cos DBC\sphericalangle=\frac{10^2+11^2-4^2}{2\cdot 10\cdot 11}=0,9318\text{, ebből } DBC\sphericalangle=21,28°.$$

Ezek után az ABD háromszögben ismét koszinusztételt alkalmazunk a kérdéses AD hosszának megállapításához:

$$AD=\sqrt{10^2+9^2-2\cdot 10\cdot 9\cdot\cos(27°-21,28°)}=1,38 \text{ cm}.$$



186.



Az ABD háromszögben és a BCD háromszögben a koszinusztételt felírva megkapjuk $ABD\sphericalangle$ és $CBD\sphericalangle$ nagyságát, melyek összege $ABC\sphericalangle$:

$$\cos ABD\sphericalangle = \frac{50^2+95^2-90^2}{2\cdot 50\cdot 95} = 0,3605, \text{ ebből } ABD\sphericalangle = 68,87°;$$

$$\cos CBD\sphericalangle = \frac{70^2+95^2-60^2}{2\cdot 70\cdot 95} = 0,7763, \text{ ebből } CBD\sphericalangle = 39,08°.$$

Így $ABC\sphericalangle = 107,95°$. Az ABC háromszögben alkalmazva a koszinusztételt az AC átló hosszára a következőt kapjuk:

$$AC = \sqrt{50^2+70^2-2\cdot 50\cdot 70\cdot \cos 107,95°} = 97,76 \text{ m}.$$

187. A két húr: $AB = 18$ cm, $BC = 9$ cm. Meg kell határoznunk az AC távolságot. Az ABC háromszög szögei a szokásos jelölésekkel: α, β, γ. A körülírt kör sugarára:

$$R = \frac{AB}{2\sin\gamma},$$

$$\sin\gamma = \frac{AB}{2R} = 0,9,$$

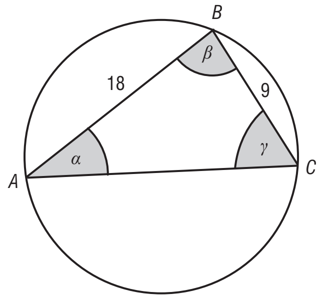
$$\gamma = 64,16°.$$

Ugyanígy számolható α is: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{2R} = 0,45$, ebből $\alpha = 26,74°$.

Így a húrok hajlásszöge (β): $\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 89,1°$.

Így a kérdezett AC koszinusztétellel:

$$AC = \sqrt{18^2+9^2-2\cdot 18\cdot 9\cdot \cos 89,1°} = 19,99 \text{ cm} \approx 20 \text{ cm}.$$



188. A háromszög oldalaira igaz a következő:

$$a+b=23 \text{ és } \frac{ab\cdot\sin 53°}{2}=51,9, \text{ ebből } a\cdot b=129,97.$$

Az egyenletrendszert megoldjuk:

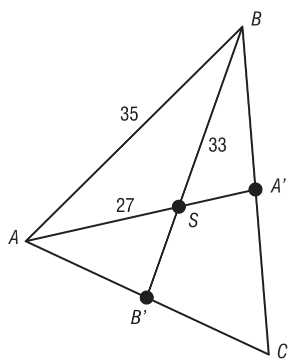
$$b=23-a, \text{ ebből } a\cdot(23-a)=129,97;$$

amiből $a_1=10$ és $a_2=13$, valamint $b_1=13$ és $b_2=10$. A megfelelő háromszögek egybevágóak, azaz a feladatnak az egybevágóság erejéig egyértelmű a megoldása. A harmadik oldalt koszinusztétellel kapjuk:

$$c=\sqrt{13^2+10^2-2\cdot13\cdot10\cdot\cos 53°}=10,61 \text{ cm}.$$

Így a háromszög oldalai 10, 13 és 10,61 cm hosszúak.

189.



Az *ABS* háromszög minden oldalát ismerjük:

$$AB=35;\ AS=\frac{2}{3}\cdot27=18;\ BS=\frac{2}{3}\cdot33=22;$$

így koszinusztétellel meghatározhatjuk az $ASB\sphericalangle$-et:

$$\cos ASB\sphericalangle=\frac{18^2+22^2-35^2}{2\cdot18\cdot22}, \text{ ebből } ASB\sphericalangle=121,77°.$$

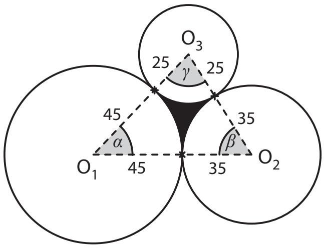
Így *ASB'* háromszögben koszinusztétellel a *b* oldal fele számolható:

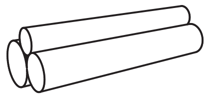
$$AB' = \sqrt{11^2 + 18^2 - 2\cdot 18\cdot 11\cos(180° - 121,77°)} = 15,38, \text{ ebből } b = 30,76 \text{ cm.}$$

Két oldalt ismerve a súlyvonalak hosszára vonatkozó összefüggés alapján is továbbhaladhatunk:

$$27 = s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot 30,76^2 + 2\cdot 35^2 - a^2}}{2}, \text{ ebből } a = 37,77 \text{ cm.}$$

182.





A kérdéses hengerszerű test térfogata $V = T_a \cdot m = T_a \cdot 200$, azaz a keresztmetszeten látható, három érintkező kör által körülzárt T_a területet kell csak meghatároznunk. Ehhez a körök középpontjai által meghatározott háromszög területéből kivonjuk a három körcikk területét. Az $O_1O_2O_3$ háromszög területe ($T_\triangle$) például a Heron-képlettel számolható, ugyanis ismerjük mindhárom oldalát:

$$s = \frac{60 + 70 + 80}{2} = 105, \text{ ebből } T_\triangle = \sqrt{105\cdot 45\cdot 35\cdot 25} = 2033,3 \text{ cm}^2.$$

A három körcikk területének meghatározásához szükségünk van a középponti szögekre, amiket az $O_1O_2O_3$ háromszög két szögére felírt koszinusztétel alapján számolhatunk:

$$\cos\alpha = \frac{80^2 + 70^2 - 60^2}{2\cdot 80\cdot 70}, \text{ ebből } \alpha = 46,57°;$$

$$\cos\beta = \frac{80^2 + 60^2 - 70^2}{2\cdot 80\cdot 60}, \text{ ebből } \beta = 57,91°;$$

így $\gamma = 75,52°$.

A körcikkek területei:

$$T_1 = \frac{\alpha}{360}\cdot r_1^2\cdot\pi = \frac{46,57}{360}\cdot 45^2\cdot\pi = 822,96 \text{ cm}^2;$$

$$T_2 = \frac{\beta}{360}\cdot r_2^2\cdot\pi = \frac{57,91}{360}\cdot 35^2\cdot\pi = 619 \text{ cm}^2;$$

$$T_3 = \frac{\gamma}{360}\cdot r_3^2\cdot\pi = \frac{75,52}{360}\cdot 25^2\cdot\pi = 411,9 \text{ cm}^2.$$

Így $T_\triangle = 2033,3 - (822,96 + 619 + 411,9) = 179,44 \text{ cm}^2$.

A kérdéses térfogat tehát: $V = 200\cdot 179,44 = 35\,888 \text{ cm}^3$.

191. A szögfüggvényértékek:

a) $\frac{1}{2}$; 1; 0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) 1; $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) -1; 0; $-\frac{1}{2}$; 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) 1; nincs értelmezve; nincs értelmezve; 0; -1; -1; 0;

f) 0; nincs értelmezve; nincs értelmezve; -1; -1; 0; nincs értelmezve; 0.

192. a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) igaz; e) igaz.

193. a) $\sin 225° = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 1395° = \sin 315° = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin(-1560°) = -\sin 120° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

b) $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-1020°) = \cos 1020° = \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\operatorname{tg}(-330°) = -\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3} = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

194. a) $\sin 269° = -\sin 89°$;

$\sin 1755° = \sin 315° = -\sin 45°$;

$\sin 10 \approx \sin 572{,}96° = \sin 212{,}96° = -\sin 32{,}96°$ (vagy $-\sin(10 - 3\pi)$);

$\sin\left(-\frac{9\pi}{5}\right) = -\sin 324° = \sin 36°$;

b) $\cos 111° = -\cos 69°$;

$\cos 494° = \cos 134° = -\cos 46°$;

$\cos 8{,}8 \approx \cos 504{,}2° = \cos 144{,}2° = -\cos 35{,}8°$;

$\cos 1625° = \cos 185° = -\cos 5°$.

c) $\operatorname{tg} 521° = \operatorname{tg} 161° = -\operatorname{tg} 19°$;

$\mathrm{tg}\,2 \approx \mathrm{tg}\,114,6° = -\mathrm{tg}\,65,4°;$

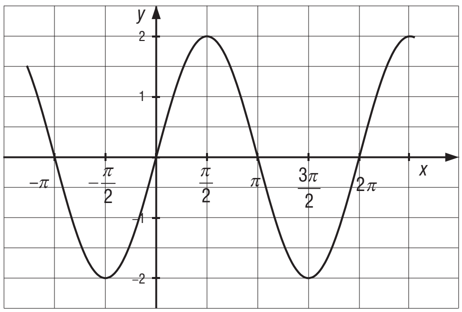
$\mathrm{tg}\left(-888°\right) = -\mathrm{tg}\,888° = -\mathrm{tg}\,168° = \mathrm{tg}\,12°;$

$\mathrm{tg}\,\dfrac{13\pi}{10} \approx \mathrm{tg}\,234° = \mathrm{tg}\,54°.$

195. A megfelelő szögek az adott intervallumban...

a) $\alpha_1 \approx 22°$ $\alpha_2 \approx 158°;$
b) $\alpha_1 = 195°$ $\alpha_2 = 345°;$
c) $\alpha_1 = 69,66°$ $\alpha_2 = 290,34°;$
d) $\alpha_1 = 127°$ $\alpha_2 = 233°;$
e) $\alpha_1 = 71°$ $\alpha_2 = 251°;$
f) $\alpha_1 = 118°$ $\alpha_2 = 298°.$

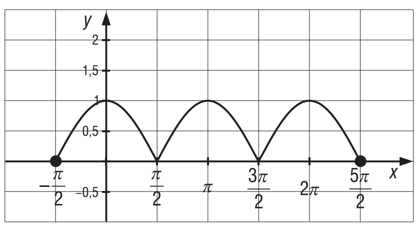
196. a)



minimum: –2, helye: $x_{\min} = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

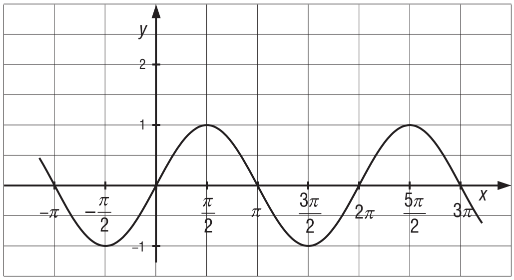
maximum: 2, helye: $x_{\max} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

b)



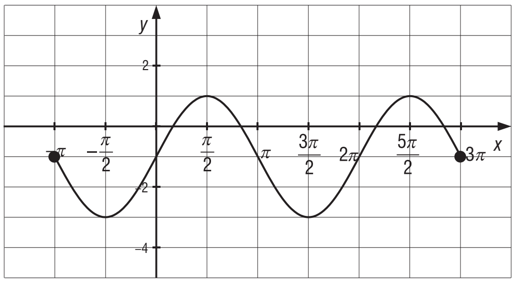
zérushelyek: $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}; \quad +\dfrac{\pi}{2}; \quad \dfrac{3\pi}{2}; \quad \dfrac{5\pi}{2}$

c)



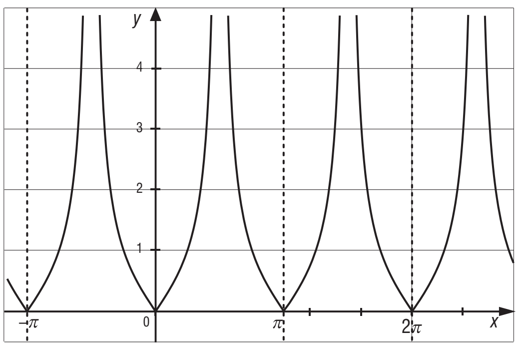
$$x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

d)



zérushelyek: $x_0 = \dfrac{\pi}{6};\quad \dfrac{5\pi}{6};\quad \dfrac{13\pi}{6};\quad \dfrac{17\pi}{6}$

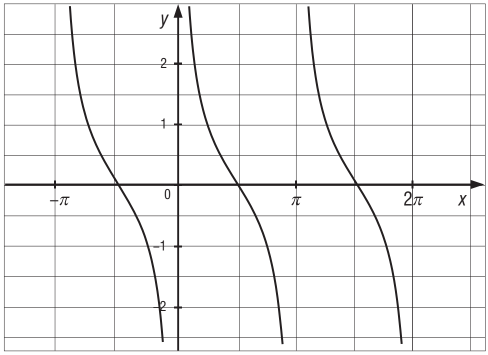
e)



menete: szigorúan monoton csökkenő a $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right]$-on

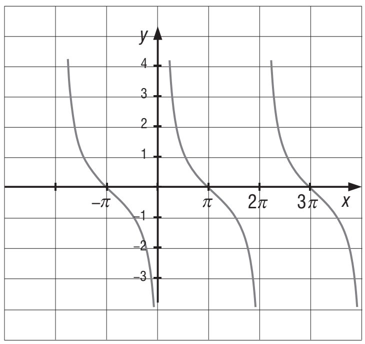
szigorúan monoton növekvő a $\left[k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$-on $(k \in \mathbb{Z})$

f)



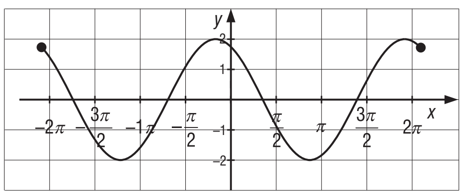
$$x \mapsto -\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\text{ctg}x$$

g)

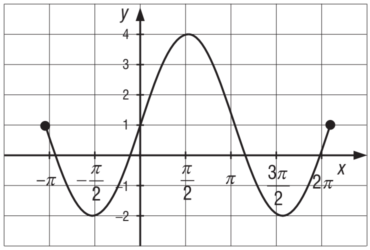


periódus: 2π

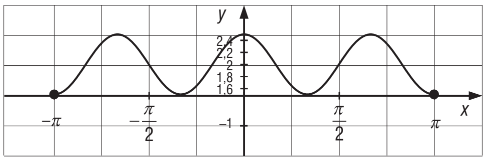
197.



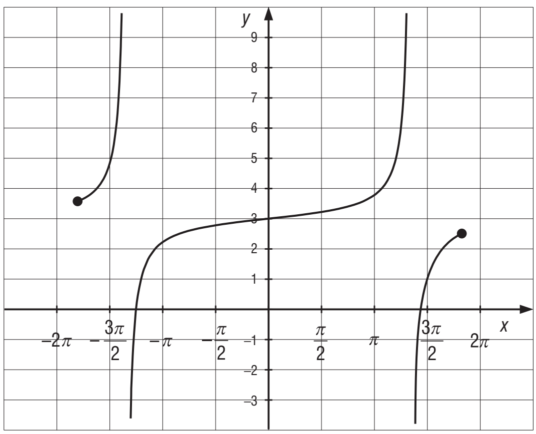
198.


y
4
3
2
1
–1
–2
x
–π
–π/2
π/2
π
3π/2
2π

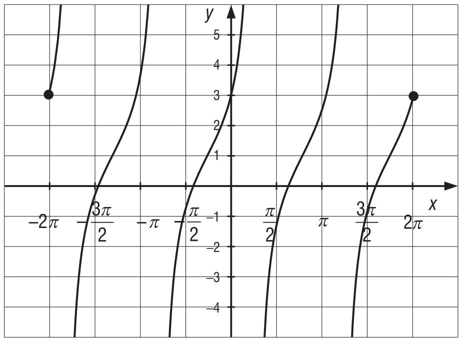
199.


y
2,4
2,2
2
1,8
1,6
–1
x
–π
–π/2
π/2
π

200.

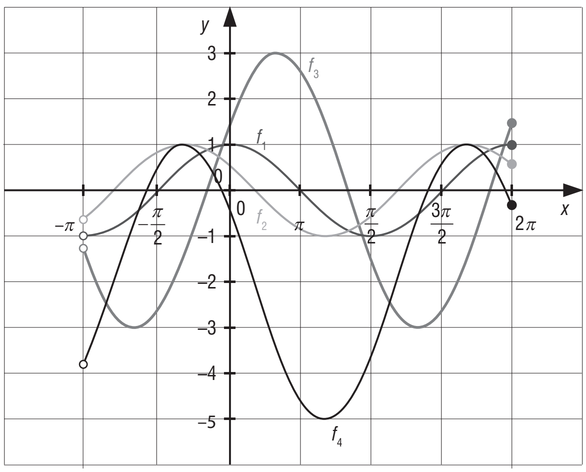

y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
–1
–2
–3
x
–2π
–3π/2
–π
–π/2
π/2
π
3π/2
2π

201.



202. $f_1 = \cos x$, $f_2 = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f_3 = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f_4 = f = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

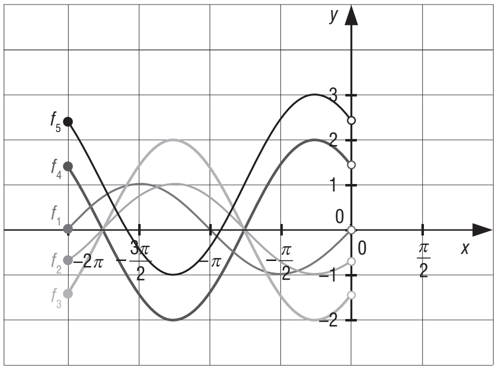
A lépések pedig: eltolás „balra” $\frac{\pi}{3}$ egységgel, 3-szoros nyújtás merőlegesen a „vízszintes” tengelyre (merőleges affinitás), eltolás „lefelé” 2 egységgel.



203. $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f_3 = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f_4 = -2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

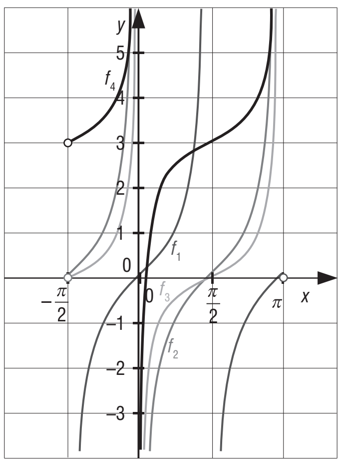
$f_5 = f = -2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

A lépések pedig: eltolás „jobbra” $\frac{\pi}{4}$ egységgel, 2-szeres nyújtás merőlegesen a „vízszintes” tengelyre (merőleges affinitás), tükrözés a „vízszintes” tengelyre, eltolás „felfelé” 1 egységgel.



204. $f_1 = \operatorname{tg} x,\ f_2 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f_3 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f_4 = f = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3.$

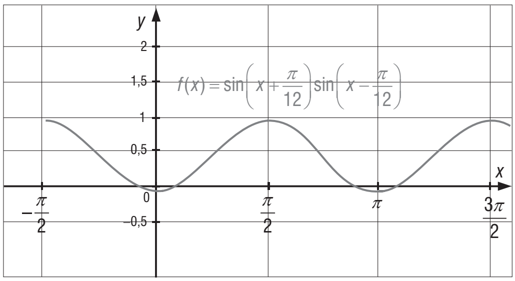
A lépések pedig: eltolás „balra” $\frac{\pi}{2}$ egységgel, $\frac{1}{2}$-szeres zsugorítás merőlegesen a „vízszintes” tengelyre (merőleges affinitás), eltolás „felfelé” 3 egységgel.



205. a) Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla, ezért a zérushelyek: $\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b) Általánosan számolunk. Addíciós tételeket alkalmazunk, használjuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt, és algebrai átalakításokat végzünk.

$$f(x)=\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)=$$
$$=(\sin x\cdot\cos\alpha+\cos x\cdot\sin\alpha)\cdot(\sin x\cdot\cos\alpha-\cos x\cdot\sin\alpha)=$$
$$=\sin^2 x\cdot\cos^2\alpha-\cos^2 x\cdot\sin^2\alpha=$$
$$=\sin^2 x\cdot\cos^2\alpha-\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\sin^2\alpha=$$
$$=\sin^2 x\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha=$$
$$=\sin^2 x-\sin^2\alpha.$$



A $\sin^2 x$ értékkészlete $[0;1]$, így az f értékkészlete $\left[-\sin^2\alpha;1-\sin^2\alpha\right]$. Az $\alpha=\frac{\pi}{12}$ esetén az értékkészlet $\left[\sqrt{3}-2;\sqrt{3}-1\right]$.

206. Használjuk fel a szögfüggvények közti összefüggéseket!

a) $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{51}}{10}$; $\quad \mathrm{tg}\alpha=\pm\frac{7}{\sqrt{51}}=\pm\frac{7\sqrt{51}}{51}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$;

b) $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$; $\quad \mathrm{tg}\alpha=\pm\frac{3\sqrt{10}}{20}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha=\pm\frac{2\sqrt{10}}{3}$;

c) $\sin\alpha=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\quad \mathrm{tg}\alpha=\pm2\sqrt{6}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$;

d) $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{39}}{8}$; $\quad \mathrm{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{39}}{5}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha=\pm\frac{5\sqrt{39}}{39}$;

e) $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\quad \sin\alpha=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$;

f) $\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{178}} = \pm\frac{3\sqrt{178}}{178}$; $\quad\sin\alpha = \pm\frac{13}{\sqrt{178}} = \pm\frac{13\sqrt{178}}{178}$; $\quad\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{3}{13}$.

207. $K = \cos 135°\cdot \mathrm{tg}(-225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

208. $K = \frac{\mathrm{ctg}(-60°)}{\sin 270°}\cdot \mathrm{tg}\,210° = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$.

209. Felhasználva, hogy 15° = 45° – 30°, és a $\sin(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\sin\left(45° - 30°\right) = \sin 45°\cdot\cos 30° - \cos 45°\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

210. Felhasználva, hogy 75° = 45° + 30°, és a $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\mathrm{tg}\left(45° + 30°\right) = \frac{\mathrm{tg}\,45° + \mathrm{tg}\,30°}{1 - \mathrm{tg}\,45°\cdot\mathrm{tg}\,30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6} = 2+\sqrt{3}.$$

211. $\cos 72° = \cos\left(90° - 18°\right) = \cos 90°\cdot\cos 18° + \sin 90°\cdot\sin 18° = 0 + 1\cdot\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

212. $\sin\left(2\alpha + \beta\right) = \sin\left(2\alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\left(2\alpha\right) =$
$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\left(1 - 2\cdot\sin^2\alpha\right)$.

213. $\cos 36° = \cos(2\cdot 18°) = \cos^2 18° - \sin^2 18° = 1 - \sin^2 18° - \sin^2 18° =$

$$= 1 - 2\cdot\sin^2 18° = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{8-\left(6-2\sqrt{5}\right)}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

214. Határozzuk meg elsőször sin 54° és cos 54° értékét!

Egyrészt $\cos 54° = \sin 36° = 2\cdot\sin 18°\cdot\cos 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$,

másrészt

$$\sin 54° = \cos 36° = 1-2\cdot\sin^2 18° = 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{8-\left(6-2\sqrt{5}\right)}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Így a tg 54° pontos értéke: $\operatorname{tg} 54° = \dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5}+1}.$

215. $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$

216. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

217. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ ebből } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

218. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ ebből } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sqrt{2}.$$

2.3. Trigonometrikus egyenletek

219. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ ebből } \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{3};$$

$$\cos^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{9} = 1, \text{ ebből } \cos^2\alpha = \frac{9}{10};$$

ahonnan

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

220. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ ebből } \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha}{3};$$

$$\frac{4\sin^2\alpha}{9} + \sin^2\alpha = 1, \text{ ebből } \sin^2\alpha = \frac{9}{13};$$

ahonnan

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

221. Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, továbbá α hegyesszög, ezért

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \mathrm{ctg}^2\alpha;$$

tehát az állítás igaz.

222. A fenti feltételek mellett az azonosság mindkét oldalán álló kifejezés értelmezhető, így a bal oldalon álló kifejezést az addíciós tételek segítségével átalakítva, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítás.

223. Felhasználjuk az alábbiakat:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Így többször kihasználva, hogy $\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}x$ és a két szög összegének koszinuszára vonatkozó összefüggést:

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\mathrm{tg}(\pi-(\alpha+\beta))=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\sin(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}\right)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$$

$$=\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)\cdot\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}(\pi-\gamma)\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)\cdot\mathrm{tg}\beta=(-\mathrm{tg}\gamma)\cdot(-\mathrm{tg}\alpha)\cdot\mathrm{tg}\beta=$$

$$=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma.$$

Ez a bizonyítandó állítás.

224. $\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}+\sqrt{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}=$

$$=\sqrt{\left(\cos^2\alpha\right)^2+4\cdot(1-\cos^2\alpha)}+\sqrt{\left(\sin^2\alpha\right)^2+4\cdot(1-\sin^2\alpha)}=$$

$$=\sqrt{(2-\cos^2\alpha)^2}+\sqrt{(2-\sin^2\alpha)^2}=\left|2-\cos^2\alpha\right|+\left|2-\sin^2\alpha\right|=$$

$$=2-\cos^2\alpha+2-\sin^2\alpha=4-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=4-1=3.$$

225. $\dfrac{\sin\alpha-\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\dfrac{\sin(3\alpha-2\alpha)-\sin3\alpha+\sin(3\alpha+2\alpha)}{\cos(3\alpha-2\alpha)-\cos3\alpha+\cos(3\alpha+2\alpha)}=$

$$\frac{\sin3\alpha\cos2\alpha-\cos3\alpha\sin2\alpha-\sin3\alpha+\sin3\alpha\cos2\alpha+\cos3\alpha\sin2\alpha}{\cos3\alpha\cos2\alpha+\sin3\alpha\sin2\alpha-\cos3\alpha+\cos3\alpha\cos2\alpha-\sin3\alpha\sin2\alpha}=$$

$$\frac{2\sin3\alpha\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\cos3\alpha\cos2\alpha-\cos3\alpha}=\frac{\sin3\alpha(2\cos2\alpha-1)}{\cos3\alpha(2\cos2\alpha-1)}=\frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha}=\mathrm{tg}3\alpha.$$

226. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

227. Az addíciós összefüggéseket használva, ekvivalens átalakításokkal kapjuk:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$$
$$-\sin x=\sin x$$
$$\sin x=0$$
$$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

228. A bal oldalt átalakítva:

$$\sin 2x+\cos x=2\sin x\cos x+\cos x=\cos x\cdot(2\sin x+1)=0.$$

Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, azaz:

$$(1)\ \cos x=0 \text{ vagy } (2)\ 2\sin x+1=0.$$

Az első eset pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

A második eset megoldásai: $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, illetve $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

229. Az addíciós összefüggéseket használva, ekvivalens átalakításokkal kapjuk:

$$\sin(2x+\pi)=\cos 2x,$$
$$-\sin 2x=\cos 2x,$$
$$\operatorname{tg} 2x=-1,$$
$$2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$
$$x=-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

230. A bal oldalt átalakítva:

$$\cos x-\sin 2x=\cos x-2\sin x\cos x=\cos x\cdot(1-2\sin x)=0;$$

a szorzat pedig pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz az egyenlet megoldásai:

$$(1)\ \cos x=0 \text{ vagy } (2)\ 1-2\sin x=0.$$

Az első eset pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; a második pedig, ha $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, illetve ha $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

231. Az egyenlet jobb oldala akkor értelmezhető, ha $\sin x\neq 0$, azaz ha $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Ha ez teljesül, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens a következő egyenlet:

$$\sin^2 x+\sin x\cos x=1$$

Átalakítva:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 1,$$
$$\sin^2 x + \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$
$$\sin x \cos x = \cos^2 x,$$
$$\cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$

A szorzat pedig pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz az egyenlet megoldásai:

$$(1)\ \cos x = 0, \text{ ebből } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ vagy } (2)\ \sin x - \cos x = 0;$$

ami $\sin x \neq 0$ feltétel teljesülése esetén ekvivalens a következővel:

$$\operatorname{ctg} x = 1, \text{ ebből } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Így a megoldáshalmaz:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

232. A pótszögekre vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$2x = \frac{\pi}{2} - 3x + k \cdot 2\pi; \qquad\qquad -2x = \frac{\pi}{2} - 3x + l \cdot 2\pi;$$

vagy

$$x = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}; \qquad\qquad x = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

233. Az ismert addíciós összefüggést felhasználva $y = \cos x$ helyettesítést végezve másodfokú egyenletet kapunk:

$$\cos 2x - 3\cos x = 1,$$
$$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 1,$$
$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai pedig: $y_1 = 2$ és $y_2 = -0,5$. Az első eset nem fordulhat elő, mert a koszinuszsfüggvény értékkészletébe a 2 nem tartozik bele, a második esetben a megoldások: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

234. A jobb oldalon álló kifejezést átalakítva az eredeti egyenlettel ekvivalens a következő:

$$2\cos^2 3x + 4\cos 3x = 3 \cdot (1 - \cos^2 3x).$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y = \cos 3x$! Az egyenlet új alakja:

$$2y^2 + 4y = 3 - 3y^2,$$

$$5y^2 + 4y - 3 = 0;$$

aminek megoldásai: $y_1 = \dfrac{-4-\sqrt{76}}{10}$ és $y_2 = \dfrac{-4+\sqrt{76}}{10}$.

Az eredeti ismeretlent visszaírva $\cos 3x = \dfrac{-4-\sqrt{76}}{10}$ vagy $\cos 3x = \dfrac{-4+\sqrt{76}}{10}$.

Az első esetben nincs megoldás, a másodikban pedig: $3x = \dfrac{61,85}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $3x = -\dfrac{61,85}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Így a megoldáshalmaz:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{20,62}{180}\pi + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{20,62}{180}\pi + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

235. Felhasználva, hogy $\cos x = \cos\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$ adódik:

$$\cos x - \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y = \cos\dfrac{x}{2}$!

Így kapjuk: $2y^2 - y - \dfrac{1}{2} = 0$, amelynek a megoldásai: $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ és $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
Visszaírva az eredeti ismeretlent:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4},$$

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{108}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm\frac{108}{90}\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

míg a másik esetben:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{36}{180}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$x=\pm\frac{36}{90}\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Azaz a megoldáshalmaz:

$$\left\{x\in\mathbb{R}:x=\pm\frac{108}{90}\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}:x=\pm\frac{36}{90}\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

236. A bal oldalt átalakítva:

$$1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2.$$

Azaz az eredeti egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin x+\cos x.$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y=\sin x+\cos x$. Így adódik:

$$y^2=y,$$

$$y\cdot(y-1)=0;$$

a megoldásai: $y_1=0$ és $y_2=1$. Visszaírjuk az eredeti ismeretlent:

$$(1)\ \sin x+\cos x=0\ \text{ vagy } (2)\ \sin x+\cos x=1.$$

Az első esetben:

$$\sin x+\cos x=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=0,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Hasonlóképpen a második esetben:

$$\sin x+\cos x=1,\text{ ebből } \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ ebből} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

aminek a megoldásai: $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ vagy $\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Azaz $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Így a megoldáshalmaz:
$$\left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

237. Az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{12}$-vel ($\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12}$) osztva, az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:
$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6},$$
$$\frac{3}{\sqrt{12}}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\cos x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}},$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Ez utóbbi megoldásai pedig:
$$\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ vagy } \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Így az egyenlet megoldásai: $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vagy $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

238. Az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{13}$-vel ($\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$) osztva, az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:
$$\frac{3}{\sqrt{13}}\sin 2x + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos 2x = \frac{2}{\sqrt{13}},$$
$$\sin\left(2x + \frac{33,69}{180}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$
Ez utóbbi megoldásai pedig: $\left(2x + \frac{33,69}{180}\pi\right) = \frac{33,69}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, valamint $\left(2x + \frac{33,69}{180}\pi\right) = \pi - \frac{33,69}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Így az egyenlet megoldásai rendezés után adódnak: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ továbbá $x = \frac{56,31}{180}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

239. Csoportosítsunk, és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!
$$\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = 0.$$
Használjuk a nevezetes szögek szögfüggvényeit!

$$\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Alkalmazzuk a két szög szinuszának összegére vonatkozó addíciós tételt!

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

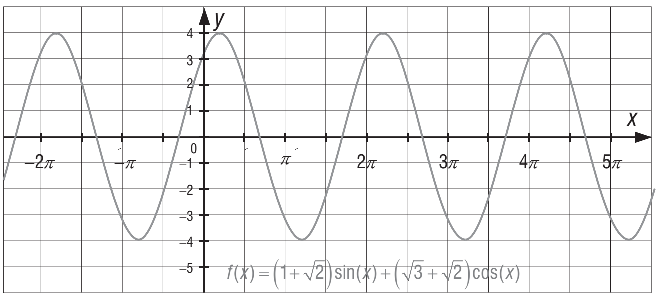
A szinuszfüggvény páratlan, ezért $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Ekkor $x+\frac{\pi}{3}=-x-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ vagy $x+\frac{\pi}{3}=\pi+x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

A második egyenletnek nincs megoldása, így

$$2x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,$$

$$x=-\frac{7\pi}{24}+k\pi.$$



240. 1. megoldás:

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel!

$$\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=0.$$

Használjuk a nevezetes szögek szögfüggvényeit!

$$\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Alkalmazzuk a két szög szinuszának összegére vonatkozó addíciós tételt!

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ vagy } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Ekkor $x+\frac{\pi}{3}=k\pi$ vagy $x+\frac{\pi}{4}=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Ebből következően $x_1=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ vagy $x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2. megoldás:

A $\cos x$ nem nulla, hiszen akkor a $\sin x$ is nulla lenne, ami nem lehetséges, így eloszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$-szel. Azt kapjuk, hogy

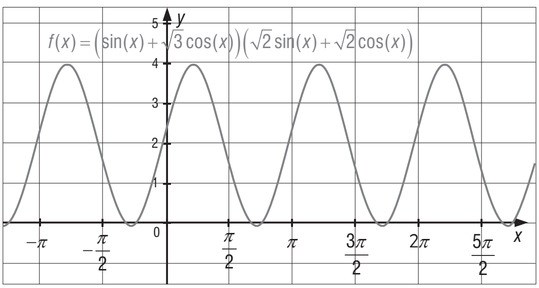
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{2}\right)=0,$$

$$\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\left(\operatorname{tg} x+1\right)=0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0.

$$\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\ \text{vagy}\ \operatorname{tg} x=-1,$$

$$x_1=-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \text{vagy}\ x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$



241. Csoportosítsunk, és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!

$$\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2.$$

Használjuk a nevezetes szögek szögfüggvényeit!

$$\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=2.$$

Alkalmazzuk a két szög szinuszának összegére vonatkozó addíciós tételt!

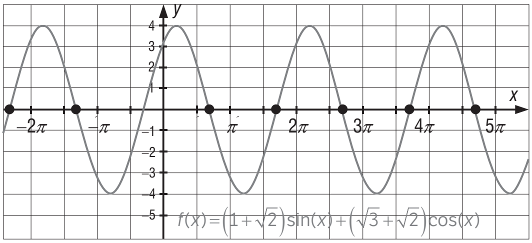
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2.$$

Két egynél nem nagyobb szám összege akkor és csak akkor 2, ha mindkét szám 1.
Ebből következően

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Ezért $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ és $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Ilyen valós számok nem léteznek, így az egyenletnek nincs megoldása.



242. A bal oldalon álló kifejezés akkor értelmezett, ha $x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

A feltétel teljesülése esetén az eredeti egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2\sin 2x,$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=4\sin x\cos x,$$

$$1=4\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$1=(\sin 2x)^2,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $\sin 2x=1$ vagy $\sin 2x=-1$. Amely egyenletek megoldásai: $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ebből $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; mely megoldások megfelelnek a feltételeinknek.

243. Vizsgáljuk az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezések értékkészletét! A jobb oldal:

$$5^x+5^{-x}=5^x+\frac{1}{5^x}\geq 2,$$

hiszen egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

A bal oldal:

$$0\leq 2\sin^2\frac{x-4y}{2}\leq 2.$$

Azaz az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal értéke 2. Ez a jobb oldalra nyilván csak akkor teljesülhet, ha $5^x=1$, ebből $x=0$.

Ebben az esetben a bal oldal értéke:

$$2\sin^2\frac{x-4y}{2}=2\sin^2(-2y),$$

ami pontosan akkor veszi fel a 2 értéket, ha $\sin(-2y)=1$ vagy $\sin(-2y)=-1$, azaz ha

$$-2y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \text{ebből } y=-\frac{\pi}{4}-k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Így a megoldáshalmaz: $\left\{\left(0,-\frac{\pi}{4}-k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

244. Vizsgáljuk az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezések értékkészletét! A jobb oldal:

$$y^2-6y+11=(y-3)^2+2,$$

aminek a minimális értéke 2, amit az $y=3$ esetén vesz fel.
A bal oldal:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$

azaz a bal oldalon álló kifejezés értékkészlete: $[-2,2]$.

Így a két kifejezés csak akkor lehet egyenlő, ha mindkettő értéke 2. Így $y=3$ és $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$, amiből $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. A megoldáshalmaz tehát:

$$\left\{\left(x,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2.4. Trigonometrikus függvények

245. Vezessünk be új ismeretlent: $y=\cos\frac{x}{3}$! Így az egyenlőtlenség:

$$y\le y^2, \text{ebből } 0\le y^2-y.$$

Ennek a megoldása: $y\le 0$ vagy $y\ge 1$, azaz az eredeti ismeretlennel:

$$\cos\frac{x}{3}\le 0 \text{ vagy } \cos\frac{x}{3}\ge 1.$$

Az első esetben a megoldás:

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\frac{x}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \text{ebből } \frac{3\pi}{2}+6k\pi\le x\le\frac{9\pi}{2}+6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

A második esetben pedig:

$$\frac{x}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \text{ebből } x=6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

246. Az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 \le 0, \text{ ebből } 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \le 0.$$

Új ismeretlent bevezetve $y = \cos x$:

$$2y^2 - 3y + 1 \le 0;$$

aminek megoldása: $\frac{1}{2} \le y \le 1$.

Az eredeti ismeretlennel:

$$\frac{1}{2} \le \cos x \le 1;$$

ennek a megoldása:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

247. Az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$2\cos^2 x + 5\cos x \ge 3 \cdot (1 - \cos^2 x);$$

rendezés után $y = \cos x$ helyettesítéssel:

$$5y^2 + 5y - 3 \ge 0.$$

Ennek a megoldása: $y \le \frac{-5 - \sqrt{85}}{10}$ vagy $y \ge \frac{-5 + \sqrt{85}}{10}$. Az eredeti ismeretlennel:

$$\cos x \le \frac{-5 - \sqrt{85}}{10} \text{ vagy } \cos x \ge \frac{-5 + \sqrt{85}}{10}.$$

Ezek közül csak a második következhet be, mégpedig:

$$-\frac{65,04}{180}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{65,04}{180}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

248. $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\right| = \sqrt{2} \cdot \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, így az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens a következő:

$$\sqrt{2} \cdot \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1,$$

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ennek a megoldása:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi \le \left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi \le x \le k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

249. Alkalmazzuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt!

$$\frac{1-2\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x}{2\left(\sin x-1\right)}<0$$

$$\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\left(\sin x-1\right)}<0$$

Alkalmazzuk az $y=\sin x$ helyettesítést!

$$\left(-1 \le y < 1\right),$$

$$\frac{2y^2+y-1}{2\left(y-1\right)}<0.$$

Alakítsuk az algebrai tört számlálóját szorzattá.

$$\frac{2\left(y+1\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{2\left(y-1\right)}<0,$$

$$\frac{\left(y+1\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{y-1}<0.$$

Készítsünk előjeltáblázatot!

y	-1	$-1<y<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<y<1$	1
számláló	0	–	0	+	+
nevező	–	–	–	–	0
tört	0	+	0	–	nem értelmezett

Az y ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Ez azt jelenti, hogy $\frac{1}{2}<\sin x<1$.

Ennek megoldása: $\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}.$

250. A második egyenlet értelmezhetőségéhez szükséges, hogy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ és $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Az első egyenletből: $y = \frac{\pi}{4} - x$, amit a másodikba beírva, addíciós összefüggést használva:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1,$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = 1,$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1,\ \operatorname{tg} x \neq -1.$$

A $\operatorname{tg} x \neq -1$ feltételt felhasználva ez ekvivalens az alábbival: $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$, ahol $z = \operatorname{tg} x$ ismeretlent bevezetve $z^2 - z = 0$ adódik, aminek megoldásai $z_1 = 0$ és $z_2 = 1$. Az eredeti ismeretlennel:

$\operatorname{tg} x = 0$, ebből $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a másik esetben pedig: $\operatorname{tg} x = 1$, ebből $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A megfelelő y értékek $y = \frac{\pi}{4} - x$ alapján adódnak. Mindegyikre teljesül a kezdeti feltételünk. Így a megoldáshalmaz:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = k\pi,\ y = \frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = -k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

251. A második egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk, felhasználva az első összefüggést:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Azaz $\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Azaz $x - y = \pm\frac{\pi}{6} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Így az egyenletrendszer első egyenletével ezt összeadva, illetve abból kivonva adódnak a megoldások: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és a megfelelő y: $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

továbbá: $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és a megfelelő y: $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

252. A második egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk, felhasználjuk az első egyenletet:

$$\sin 2x + \sin 2y = 2\sin(x+y)\cos(x-y) = \cos(x-y) = \frac{1}{2}.$$

Azaz $x - y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $x - y = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

Az első egyenletből pedig: $x + y = \frac{\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$ vagy $x + y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ezeket összeadva és kivonva egymásból négy lehetőség adódik:

(1) $x = \frac{\pi}{4} + (k+m)\pi,\ y = -\frac{\pi}{12} + (m-k)\pi$, ahol $k, m \in \mathbb{Z}$.

(2) $x = \frac{7\pi}{12} + (k+n)\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + (n-k)\pi$, ahol $k, n \in \mathbb{Z}$.

(3) $x = -\frac{\pi}{12} + (l+m)\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + (m-l)\pi$, ahol $m, l \in \mathbb{Z}$.

(4) $x = \frac{\pi}{4} + (l+n)\pi,\ y = \frac{7\pi}{12} + (n-l)\pi$, ahol $n, l \in \mathbb{Z}$.

253. A második egyenlet értelmezhetőségéhez szükséges, hogy: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

A második egyenlettel ekvivalens $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3}$, ahol a számláló az első egyenletből ismert, azaz a nevező: $\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Ehhez az összefüggéshez az első egyenletet hozzáadva, illetve azt kivonva adódik:
$\cos(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\cos(x+y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Az első összefüggésből:
$x - y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a másodikból pedig: $x + y = \pm\frac{69{,}3}{180}\pi + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

Amiből

$$x = \frac{\pm\frac{\pi}{4} + \left(\pm\frac{69{,}3}{180}\pi\right) + 2(k+l)\pi}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{\pm\frac{\pi}{4} - \left(\pm\frac{69{,}3}{180}\pi\right) + 2(k-l)\pi}{-2},$$

ahol k és l tetszőleges egészek lehetnek, és a $\pm$ előjeleket is tetszőlegesen választhatjuk meg a képletekben.

3. Koordináta-geometria – megoldások

3.1. Vektorok, szakaszok

254. Tudjuk, hogyha az $\overrightarrow{AB}$ vektor kezdő, illetve végpontja $A(x_1;y_1)$ és $B(x_2;y_2)$, akkor a vektor koordinátái:

$$\overrightarrow{AB}\ (x_2-x_1;y_2-y_1),$$

ezért

$$4-(-2)=6 \text{ és } -1-3=-4$$

a két koordináta: $\overrightarrow{AB}(6;-4)$.

255. Az előző feladat szerint eljárva: $\overrightarrow{AB}(-10;4)$.

256. A vektor koordinátáinak kiszámítására vonatkozó képletet alkalmazva (**254.** feladat):

$$x_2-(-1)=1,\text{ ebből } x_2=0;$$

$$y_2-3=2,\text{ ebből } y_2=5.$$

Tehát a végpont: $B(0;5)$.

257. A **243.** feladat szerint eljárva: $Q(-2;2)$.

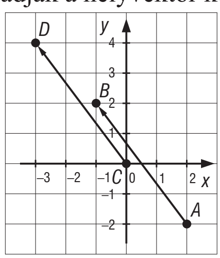
258. a) A vektor koordinátáinak kiszámítására vonatkozó képletet alkalmazva (**254.** feladat):

$$-1-x_1=-3,\text{ ebből } x_1=2;$$

$$2-y_1=4,\text{ ebből } y_1=-2.$$

Tehát a kezdőpont: $A(2;-2)$.

b) Az ábrán lévő C és D pontok adják a helyvektor kezdő, illetve végpontját:



c) Tudjuk, hogy ha az $\overrightarrow{AB}$ koordinátái $\overrightarrow{AB}(x;y)$, akkor a vektor hosssza:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2+y^2};$$

ezért

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ egység.}$$

259. A megfelelő párok: $a-\gamma$, $b-\varepsilon$, $c-\alpha$, $d-\delta$, $e-\varphi$, $f-\beta$.

260. $\overrightarrow{AB}(4,-4)$, $\overrightarrow{AC}(-4;0)$, $\overrightarrow{DC}(-5;5)$, $\overrightarrow{BD}(-3;-1)$, $\overrightarrow{CB}(8;-4)$.

261. Az $ABCD$ négyszög egy paralelogramma, melyben E az AC oldal felezőpontja. Az egymással egyenlő vektorok:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ és

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

262. A $P(x;y)$ pont helyvektora $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ez alapján a lineáris kombinációk felírhatók, pl. $\vec{c} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$.

263. Ismeretes, hogy egy $\vec{v}(x;y)$ vektor k-szorosának koordinátái: $k\vec{v}(kx;ky)$, ezért

$$-\vec{b}(-2;-5); \qquad 2\vec{a}(-12;-18); \qquad \frac{1}{3}\vec{a}(-2;-3).$$

Ismeretes, hogy az $\vec{a}(x_1;y_1)$ és $\vec{b}(x_2;y_2)$ vektorok összege az $\vec{a}+\vec{b}(x_1+x_2;y_1+y_2)$ vektor, ezért

$$\vec{a}+\vec{b}(-4;-4);\ \frac{\vec{a}+\vec{b}}{4} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})(-1;-1);\ -\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}(6;13);$$

$$\frac{\vec{a}-\vec{b}}{4} = \frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b})\left(-2;-\frac{7}{2}\right).$$

264. Először felírjuk a C-ből D-be mutató vektort:

$$\overrightarrow{CD}\left(5-(-3);6,5-0,5\right)=\overrightarrow{CD}(8;6).$$

Használjuk fel, hogy egy $\vec{a}(x;y)$ vektor hossza: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$; így $CD=\sqrt{8^2+6^2}=10$ egység!

265. Mivel $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$, ezért $\overrightarrow{AB}$ első és második koordinátája is $5\sqrt{2}$, így hossza a távolságképlet miatt 10 egység.

266. a) Mivel $\overrightarrow{AB}$ koordinátái $\overrightarrow{AB}(6;12)$, ezért

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}\approx 13,42$ egység.

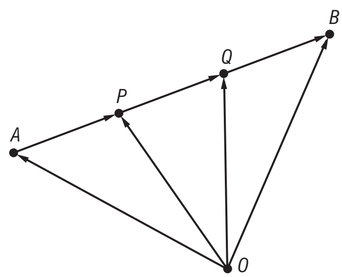
b) Ismeretes, hogy az $A(x_1;y_1)$ és $B(x_2;y_2)$ végpontú szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};$$

ahonnan behelyettesítés után:

$$x=1;\ y=3 \text{ ebből } F(1;3).$$

c) Ha O az origó és P az A-hoz közelebbi, Q pedig az A-tól távolabbi harmadoló pont, akkor $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

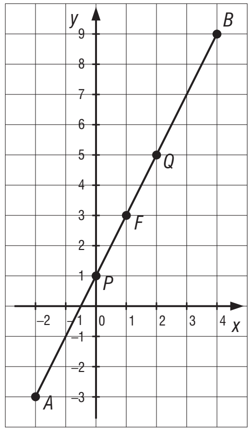


Mivel $\overrightarrow{OA}(-2;-3)$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}(2;4)$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}(4;8)$;

ezért $\overrightarrow{OP}(0;1)$, ebből $P\left(\frac{2a_1+b_1}{3};\frac{2a_2+b_2}{3}\right)=P(0;1)$;

$\overrightarrow{OQ}(2;5)$, ebből $Q\left(\frac{a_1+2b_1}{3};\frac{a_2+2b_2}{3}\right)=Q(2;5)$.

d)



267. a) Legyen $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, az A pont B-re vonatkozó tükörképe $A'(a_1'; a_2')$!
A felezőpont koordinátáiról tanultak miatt

$$b_1 = \frac{a_1 + a_1'}{2},\ b_2 = \frac{a_2 + a_2'}{2}.$$

Innen $a_1' = 2b_1 - a_1$, $a_2' = 2b_2 - a_2$.
A konkrét adatokat behelyettesítve: $A'(5; -16)$.

b) $P\left(\frac{5\cdot(-3)+3\cdot 1}{3+5}; \frac{5\cdot 6+3\cdot(-5)}{3+5}\right)$, $P\left(\frac{-12}{8}; \frac{15}{8}\right)$, $P\left(\frac{-3}{2}; \frac{15}{8}\right)$.

c) Legyen a keresett pont $Q(q; 0)$! Mivel a három pont egy egyenesre illeszkedik, ezért

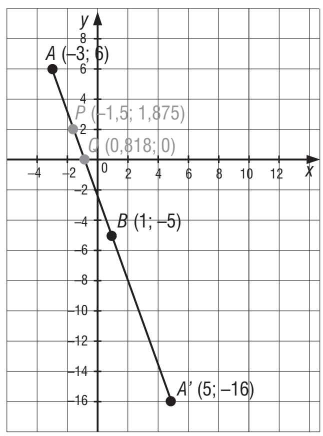
$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AB}$,

$q + 3 = 4k$, $0 - 6 = -11k$,

$k = \frac{6}{11}$,

$q = \frac{24}{11} - 3 = -\frac{9}{11}$,

$Q\left(-\frac{9}{11}; 0\right)$.



268. a) Azt kell eldöntenünk, hogy egy egyenesen van-e az A, a B és a C pont! Ez egyenértékű azzal, hogy $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ párhuzamosak-e. Ez pontosan akkor teljesül, ha van olyan k szám, hogy $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Ez az $\overrightarrow{AB}(4;3)$ és $\overrightarrow{BC}(7;5)$ vektorok koordinátáira nézve azt jelenti, hogy

$$4k = 7, \text{ ebből } k = \frac{7}{4};$$

$$3k = 5, \text{ ebből } k = \frac{5}{3}.$$

Mivel a két egyenletből kapott k értékek különbözők, így nem létezik megfelelő szám, ezért a repülő irányt változtatott a B pontban.

b) A vektorok hosszának kiszámítására vonatkozó összefüggés miatt:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \; BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8,6;$$

ezért az út hossza: $AB + BC = 13,6$ egység.

269. a) – b) Meghatározzuk az $\vec{a} = \overrightarrow{AB}(4;3)$ és $\vec{b} = \overrightarrow{BC}(12;5)$ vektorok hajlásszögét, így egyszerre válaszolhatunk az a), illetve b) kérdésekre. Tudjuk, hogy az $\vec{a}(x_1; y_1)$ és $\vec{b}(x_2; y_2)$ vektorok skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

másrészt definíció szerint

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi;$$

ahol φ a vektorok hajlásszöge. Felhasználva a vektorok hosszára vonatkozó összefüggést:

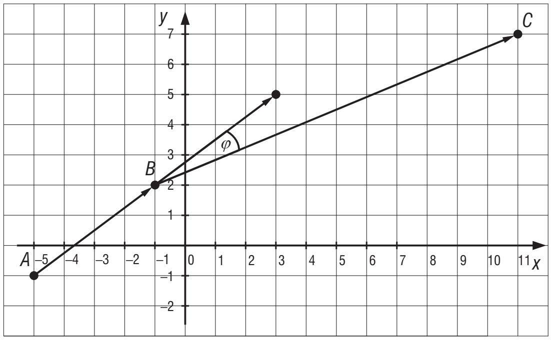
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \cos\varphi.$$

Behelyettesítve:

$$4 \cdot 12 + 3 \cdot 5 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \cos\varphi, \text{ ebből } \frac{63}{5 \cdot 13} = \cos\varphi, \text{ ebből } \varphi \approx 14,25°;$$

ennyivel tért tehát el a gép.

c) A megtett út: $AB + BC = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5 + 13 = 18$ egységnyi volt.



270. Mivel $\overrightarrow{AD}(3;2)$ és $\overrightarrow{BC}(6;4)$ nem egyenlőek, így az $ABCD$ négyszög nem lehet paralelogramma, hiszen annak szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlőek, ezért a szemközti oldalakon azonos irányban indított vektoroknak is egyenlőeknek kell lenniük. Annának tehát nincs igaza.
Mivel
$$\overrightarrow{BC} = 2 \cdot \overrightarrow{AD};$$
ezért a négyszög AD és BC oldala párhuzamos lesz, következésképpen a négyszög trapéz, tehát Bélának igaza van.

271. Tudjuk, hogyha a háromszög csúcsai $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$; akkor a súlypontja:
$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$
Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy a háromszög súlypontja: $S(1;1)$.

272. Ha x és y a C csúcs ismeretlen koordinátái, akkor a súlypontra vonatkozó összefüggés miatt:
$$-5+3+x=-4, \text{ ebből } x=-2;$$
$$-2+1+y=6, \text{ ebből } y=7.$$
A hiányzó csúcs tehát: $C(-2;7)$.

273. Ha az $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}(3;4)$ vektort +90°-kal elforgatjuk, akkor az $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ vektort kapjuk. Ismeretes, hogy egy $\vec{v}(x;y)$ vektor +90°-os elforgatottjának koordinátái: $(-y;x)$, –90°-os elforgatottjának koordinátái pedig: $(y;-x)$. Ez alapján adódik az $\overrightarrow{AD}(-4;3)$ vektor, innen pedig a $D(d_1;d_2)$ pont koordinátáira:

$$d_1-(-2)=-4, \text{ ebből } d_1=-6;$$
$$d_2-4=3, \text{ ebből } d_2=7.$$

Kaptuk a $D(-6;7)$ pontot. Hasonlóan eljárva adódik a $C(3;19)$ csúcs.

274. A feladatnak 2 négyzet is megoldása lesz. Az $\overrightarrow{AB}(4;-2)$ +90°-os elforgatásával adódik $\overrightarrow{AD}(2;4)$, innen $D(3;8)$ és $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ miatt $C(7;6)$. Az $\overrightarrow{AB}(4;-2)$ –90°-os elforgatásával adódik $\overrightarrow{AD'}(-2;-4)$, innen pedig $D'(-1;0)$ és $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$ miatt $C'(3;-2)$.

275. a) A súlypont koordinátáira vonatkozó képlet felhasználásával:

$$S\left(\frac{-2+2+8}{3};\frac{1+(-2)+6}{3}\right)=S\left(\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right).$$

b) Mivel az $\overrightarrow{BA}(-4;3)$ és $\overrightarrow{BC}(6;8)$ oldalvektorok skaláris szorzata:

$$(-4)\cdot 6+3\cdot 8=0;$$

ezért a két vektor merőleges, tehát $ABC\sphericalangle=90°$.

c) A Thalész-tétel megfordítása miatt akkor AC az ABC derékszögű háromszög köré írt körének átmérője, így O az AC felezési pontja, ezért a felezési pontra vonatkozó képlet szerint:

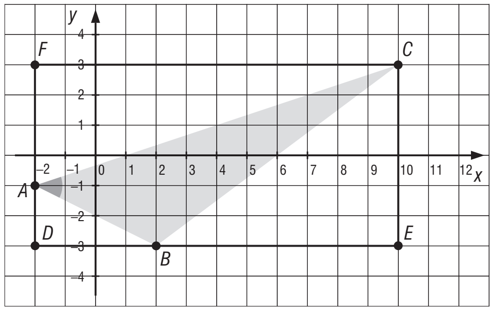
$$O\left(\frac{8+(-2)}{2};\frac{6+1}{2}\right)=O\left(3;\frac{7}{2}\right).$$

d) Mivel

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5, \text{ illetve } \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10;$$

ezért az ABC háromszög területe: $\frac{5\cdot 10}{2}=25$ területegység, hiszen a háromszög derékszögű, így egy téglalap feléről van szó.

276. a) A háromszög területének meghatározása céljából foglaljuk bele a háromszöget az alábbi ábra szerint egy téglalapba úgy, hogy annak oldalai legyenek párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel és a háromszög csúcsai a téglalap oldalain helyezkedjenek el.
(Ezt azt elvet alkalmazva a csúcsok koordinátáinak ismeretében mindig kiszámíthatjuk egy háromszög területét!)



Könnyen leolvasható, hogy a téglalap két oldalának hossza: 12 és 6 egység, így területe 72 területegység. Az ADB; BEC és CFA derékszögű háromszögek területei rendre:

$$\frac{4\cdot 2}{2}=4;\ \frac{8\cdot 6}{2}=24;\ \frac{12\cdot 4}{2}=24 \text{ területegység.}$$

Ezeket levonva a téglalap területéből adódik az ABC háromszög területe:

$$t_{ABC}=72-4-24-24=20 \text{ területegység.}$$

b) Mivel

$$\overrightarrow{AB}(4;-2), \text{ ebből } \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$

$$\overrightarrow{AC}(12;4), \text{ ebből } \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 12+(-2)\cdot 4=40,$$

így a vektorok skaláris szorzatáról tudottak miatt:

$$2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{10}\cdot\cos\alpha=40,$$

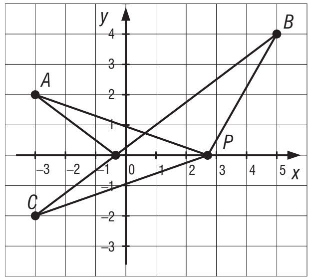
$$\cos\alpha=\frac{40}{40\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha=45°.$$

277. Vegyük észre, hogy

$$f(x)=\sqrt{(x+3)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+4^2}!$$

Ha tekintjük a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-3;2)$ és $B(5;4)$ pontokat, akkor az ismert távolságképlet szerint $f(x)$ éppen az x tengely valamely $P(x;0)$ pontjától mért távolságaik összegét fogja megadni. A kérdés tehát az, hogy mely P pontra lesz az $AP+PB$ összeg minimális. Tükrözzük az A pontot az x tengelyre, a tükörkép: $C(-3;-2)$.



Mivel $AP = CP$, ezért

$$f(x) = AP + PB = CP + PB \geq CB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10;$$

a BCP háromszögre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával. Az f függvény minimális értéke tehát 10, a minimumot adó P pont a BC egyenes és az x tengely metszéspontja.

278. Igazolnunk kell, hogy az $\vec{a}(-6;8)$ és a $\vec{b}(16;12)$ vektorok (ugrásaik irányai) merőlegesek egymásra. Ehhez megmutatjuk, hogy a skaláris szorzatuk 0:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 16 + 8 \cdot 12 = 0.$

279. A vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen kiszámítva: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = -4$, illetve: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2} \cdot \cos\alpha = -4.$

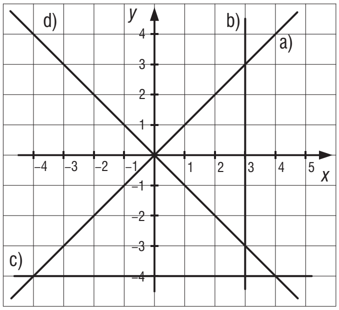
Ebből $\cos\alpha = \dfrac{-4}{\sqrt{377}} = -0{,}2060$, azaz $\alpha = 101{,}9°$.

280. A feladat a $\overrightarrow{CA}(-9;-5)$ és $\overrightarrow{CB}(-6;1)$ vektorok szögének meghatározása.
A vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen kiszámítva:
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-9) \cdot (-6) + (-5) \cdot 1 = 49,$
másrészt $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 1^2} \cdot \cos\gamma = 49.$

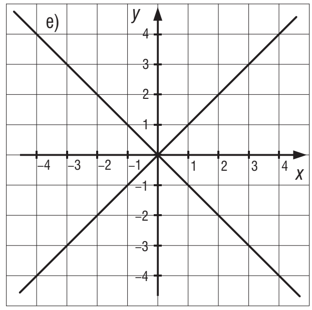
Ebből $\cos\gamma = \dfrac{49}{\sqrt{3922}} = 0{,}7824$, azaz $\gamma = 38{,}51°$.

3.2. Egyenesek

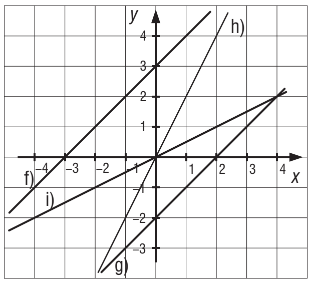
281. a) – d)



e)



f) – i)



282. Mivel az $(x_0; y_0)$ ismert ponton áthaladó, $\vec{n}(n_1; n_2)$ ismert normálvektorú egyenes egyenlete:

$$n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0,$$

ezért behelyettesítve:

$$4x - 3y = 4 \cdot 2 - 3(-1), \text{ ebből } 4x - 3y = 11.$$

283. Mivel az $(x_0; y_0)$ ismert ponton áthaladó, $\vec{n}(n_1; n_2)$ ismert normálvektorú egyenes egyenlete:

$$n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0,$$

ezért behelyettesítve:

$$2x - 3y = 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-5), \text{ ebből } 2x - 3y = 7.$$

284. Mivel az $(x_0; y_0)$ ismert ponton áthaladó, $\vec{v}(v_1; v_2)$ ismert irányvektorú egyenes egyenlete:

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0,$$

így behelyettesítés után:

$$-4x-5y=8-15, \text{ ebből } 4x+5y=7.$$

285. Mivel az $(x_0;y_0)$ ismert ponton áthaladó, $\vec{v}(v_1;v_2)$ ismert irányvektorú egyenes egyenlete:

$$v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0,$$

így behelyettesítés után:

$$x+6y=2+6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-8.$$

286. Mivel az $(x_0;y_0)$ ismert ponton áthaladó, m meredekségű egyenes általános egyenlete:

$$m(x-x_0)=y-y_0, \text{ ebből } y=mx+y_0-mx_0,$$

így behelyettesítve:

$$4(x-3)=y+2, \text{ ebből } y=4x-14.$$

287. Mivel az $(x_0;y_0)$ ismert ponton áthaladó, m meredekségű egyenes általános egyenlete:

$$m(x-x_0)=y-y_0, \text{ ebből } y=mx+y_0-mx_0,$$

így behelyettesítve:

$$-\frac{1}{3}(x+3)=y+2, \text{ ebből } y=-\frac{1}{3}x-3.$$

288. Az $\overrightarrow{AB}(5;6)$ vektor az egyenesnek irányvektora, így a B pontot tekintve ismertnek az irányvektoros egyenlet képletébe helyettesítve:

$$6x-5y=6\cdot3-5\cdot7, \text{ ebből } 6x-5y=-17.$$

289. A $\overrightarrow{PQ}(-8;6)$ vektor az egyenesnek irányvektora, így a P pontot tekintve ismertnek az irányvektoros egyenlet képletébe helyettesítve:

$$6x+8y=6\cdot4-(-8)\cdot(-1), \text{ ebből } 3x+4y=8.$$

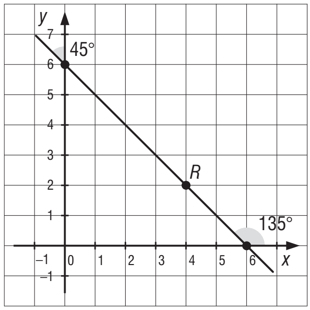
290. A feladatban szereplő szög az egyenes ún. irányszöge, ennek tangense (iránytangens) az egyenes meredeksége, ezért a meredekséggel felírt általános egyenletbe helyettesítve, felhasználva, hogy $m=\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}(x-0)=y+7, \text{ ebből } y=\sqrt{3}x-7.$$

291. Az egyenes az x tengely nemnegatív felével $45° + 90° = 135°$-os szöget zár be, ezért meredeksége: $m = \operatorname{tg}135° = -1$, így egyenlete:

$$-(x-4) = y-2, \text{ ebből } y = -x+6.$$

Az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$, ahonnan $x = 6$, ebből $(6; 0)$. Az y tengelyt ott metszi, ahol $x = 0$, így $y = 6$, ebből $(0; 6)$.



292. Mivel a P pont koordinátáit behelyettesítve:

$$4 \cdot 7 - \frac{5}{2} \cdot 6 = 13 \neq 12;$$

ezért P nincs rajta az egyenesen, tehát a lövedék nem találhatja el a madarat.

293. Behelyettesítve a P pont koordinátáit:

a) $4 \cdot (-2) - 17 \cdot 3 = p$, ebből $p = -59$;

b) $2 \cdot (-2) + 3p = -3$, ebből $p = \dfrac{1}{3}$;

c) $-2p - 12 = 8$, ebből $p = -10$.

294. Ha $y = 0$, akkor $x = 3$, továbbá ha $x = 0$, akkor $y = 4$, ezért az egyenes az x tengelyt a $(3;0)$, az y tengelyt pedig $(0;4)$ pontban metszi. A háromszög derékszögű, területének kétszerese a befogók szorzata (fél téglalap!), így

$$t = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ területegység.}$$

295. Célszerű azt felhasználni, hogy párhuzamos egyenesek normálvektorai közösek, így a normálvektoros egyenletből könnyen leolvasható az $\vec{n}(5;-7)$ normálvektor felhasználásával:

$$5x - 7y = 5 \cdot (-4) + (-7) \cdot 3, \text{ ebből } 5x - 7y = -41.$$

296. Az előző feladat módszere szerint számolva: $2x-3y=1$.

297. Célszerű most azt felhasználni, hogy párhuzamos egyenesek meredekségei egyenlőek, ha léteznek, így a keresett egyenes egyenlete felírható $y=-\frac{2}{3}x+b$ alakban. Behelyettesítve a P pont koordinátáit:

$$5=-\frac{2}{3}\cdot 9+b,\text{ ebből } b=11,$$

így a keresett egyenes egyenlete: $y=-\frac{2}{3}x+11$.

298. Az előző feladat módszere szerint számolva: $y=-\frac{4}{5}x+9$.

299. Tudjuk, hogy két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha az egyik valamely normálvektora a másik egyenesnek irányvektora lesz, így $\vec{v}(5;-7)$ a keresett egyenes irányvektora, amelynek segítségével:

$$-7x-5y=(-7)\cdot(-4)-5\cdot 3,\text{ ebből } 7x+5y=-13.$$

300. Az előző feladat módszere szerint számolva: $5x+6y=-20$.

301. Azt fogjuk felhasználni, hogy két, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenes pontosan akkor merőleges, ha meredekségeik szorzata –1. A keresett egyenes meredeksége tehát $\frac{3}{2}$, ezért egyenlete $y=\frac{3}{2}x+b$ alakú. Behelyettesítve az adott pont koordinátáit:

$$5=\frac{3}{2}\cdot 9+b,\text{ ebből } b=-8{,}5,$$

a keresett egyenes:

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{17}{2}.$$

302. Tekintsük az egyenes valamely $Q(x;y)$ pontját és vegyük észre, hogy $\vec{n}(A;B)$ az egyenes normálvektora! Jelölje $\vec{e}$ az egyenes valamely egységnyi hosszú normálvektorát, és tekintsük a $\overrightarrow{PQ}(x-x_0;y-y_0)$ vektort! A skaláris szorzat értelmezése miatt:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{e}\right|=\left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot 1\cdot\cos\alpha\right|=\left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\cos\alpha\right|=d.$$

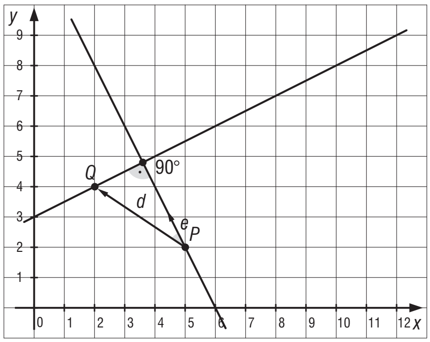
Legyen

$$\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \text{ ebből } \vec{e} = \vec{e}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right);$$

így a skaláris szorzatnak a koordinátákkal felírt alakját alkalmazva:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{e} = \frac{A(x-x_0)}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C-Ax_0-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

A kétféle alakot összevetve adódik a bizonyítandó állítás.



303. Az előző feladat módszere szerint számolva: $y = -\frac{7}{4}x - 16.$

304. Adott $P(x_0; y_0)$ pontnak az $Ax + By + C = 0$ alakú egyenlettel adott egyenestől vett távolsága:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Behelyettesítve:

$$d = \frac{|3\cdot(-2)+(-4)\cdot 3+(-1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{19}{5} = 3{,}8 \text{ egység.}$$

305. Először igazoljuk, hogy a két egyenes párhuzamos. A második egyenes egyenlete átrendezés után:

$$3x - 4y = -1.$$

Ennek egy normálvektora a $\vec{n}(3;-4)$ vektor, melynek kétszereséről leolvasható, hogy normálvektora az e egyenesnek, tehát a két egyenes valóban párhuzamos. Könnyű látni, hogy pl. a $P(1;1)$ pont rajta van az f egyenesen. A P-nek e-től vett távolsága lesz a két egyenes távolsága.

Mivel az e egyenlete felírható

$$6x-8y-5=0$$

alakban, így a pont-egyenes távolságképletet alkalmazva:

$$\frac{|6-8-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{7}{10}=0,7 \text{ egység.}$$

(Ezt a módszert célszerű alkalmazni két párhuzamos egyenes távolságának meghatározásához ahelyett, hogy egy mindkettőre merőleges egyenes metszéspontjainak kiszámítása után azok távolságának kiszámításával dolgoznánk.)

306. Tudjuk az elemi geometriából, hogy két adott ponttól egyenlő távoli pontok halmaza a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese. Az AB szakasz felezőpontja:

$$F\left(\frac{-2+6}{2};\frac{7+1}{2}\right)=F(2;4).$$

Az $\overrightarrow{AB}(8;-6)$ a felezőmerőlegesnek normálvektora, így a normálvektoros egyenletet alkalmazva:

$$8x+(-6)\cdot y=8\cdot 2+(-6)\cdot 4,$$
$$8x-6y=-8,$$
$$4x-3y=-4.$$

307. Az AB felezőpontja:

$$F\left(\frac{-5+1}{2};\frac{8+2}{2}\right)=F(-2;5).$$

A megoldást adó egyenes a CF egyenes lesz, melynek egyenletét a **283.** feladat alapján eljárva határozhatunk meg. $\overrightarrow{FC}(1;1)$ irányvektor, így:

$$x-y=-1-6, \text{ ebből } x-y=-7.$$

308. A metszéspont koordinátái az egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásából adódnak.

$$\begin{cases} 2x-3y=1; \\ 5x-2y=-3. \end{cases}$$

Adjuk össze az első egyenlet 2-szeresét és a második egyenlet (-3) szorosát! (Ennek következtében az y kiesik: egyenlő együtthatók módszere.) Azt kapjuk:

$$-11x=11, \text{ ebből } x=-1, \text{ amiből } y=-1;$$

a metszéspont $(-1;-1)$.

309. Az előző feladat megoldásában látottak szerint eljárva a metszéspont: $(1;-2)$.

310. a) Meghatározzuk az AB, illetve CD egyenesek egyenletét, majd megoldjuk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert. A megoldásként adódó pont lesz a kereszteződés helye. Mivel $\overrightarrow{AB}(6;-8)$ irányvektor, így az AB egyenlete:

$$-8x-6y=16-18, \text{ ebből } 4x+3y=1.$$

$\overrightarrow{DC}(4;14)$ miatt:

$$14x-4y=14\cdot 3-4\cdot 6, \text{ ebből } 7x-2y=9.$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 4x+3y=1; \\ 7x-2y=9. \end{cases}$$

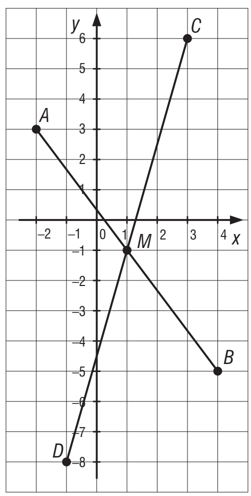
Az első egyenlet 2-szereséhez hozzáadva a második 3-szorosát kiesik az y (ez az ún. egyenlő együtthatók módszere), így

$$29x=29, \text{ ebből } x=1, \text{ amiből } y=-1;$$

a metszéspont: $M(1;-1)$.

b) Vegyük észre, hogy a metszéspont az AB szakasz felezőpontja, ezért a távolságképlet miatt:

$$AM=MB=\sqrt{(-2-1)^2+(3+1)^2}=5 \text{ egység} = 50 \text{ km!}$$



311. a) A keresett pont rajta van az adott egyenesen, valamint az AB szakasz felezőmerőlegesén.

Az AB felezőpontja: $F(1;4)$.

Mivel $\overrightarrow{AB}(-6;2)$ a felezőmerőleges normálvektora, így a normálvektoros egyenletet alkalmazva:

$$-6x+2y=-6+8, \text{ ebből } 3x-y=-1.$$

A két egyenes metszéspontjának koordinátáira:

$$\begin{cases} x = 7 - 3y; \\ 3x - y = -1. \end{cases}$$

Behelyettesítve x-et:

$$3(7-3y) - y = -1, \text{ ebből } y = 2{,}2, \text{ amiből } x = 0{,}4.$$

A metszéspont: $(0{,}4; 2{,}2)$.

b) A távolságképlet miatt:

$$\sqrt{(4-0{,}4)^2 + (3-2{,}2)^2} = \sqrt{13{,}6} \approx 3{,}69 \text{ egység} = 36{,}9 \text{ km}.$$

312. A háromszög középvonalára vonatkozó ismert tétel miatt az oldalfelezőpontokra fektetett egyenesek (és csakis azok) felelnek meg. Ki kell tehát számolni a három középvonal-egyenes egyenletét. Legyen BC felezőpontja D, CA felezőpontja E és AB felezőpontja F! Alkalmazva a felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggést:

$$D\left(\frac{12+6}{2}; \frac{-8+4}{2}\right) = D(9;-2); \quad E\left(\frac{-4+6}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = E(1;3);$$

$$F\left(\frac{-4+12}{2}; \frac{2-8}{2}\right) = F(4;-3).$$

A **311.** feladat alapján járunk el. ED egyenlete az $\overrightarrow{ED}(8;-5)$ irányvektor miatt:

$$-5x - 8y = -5 \cdot 1 - 8 \cdot 3, \text{ ebből } 5x + 8y = 29.$$

FD egyenlete:

$$x - 5y = 4 + 5 \cdot 3, \text{ ebből } x - 5y = 19.$$

EF egyenlete:

$$6x + 3y = 6 + 9, \text{ ebből } 2x + y = 5.$$

313. a) Az $\overrightarrow{AC}(6;6)$ a magasságegyenes normálvektora, így a normálvektoros egyenletet a B pontra alkalmazva:

$$6x + 6y = 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3, \text{ ebből } x + y = 1.$$

Az AC egyenesének $\overrightarrow{AC}(6;6)$ irányvektora, így az irányvektoros egyenlet alapján az AC egyenlete:

$$6x - 6y = 6 \cdot (-2) - 6(-1), \text{ ebből } x - y = -1.$$

A két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Összeadás után:

$$2x = 0, \text{ ebből } x = 0, \text{ amiből } y = 1;$$

ezért a talppont: $T(0;1)$.

b) A BT szakasz hossza a távolságképlet alapján:

$$BT = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ egység.}$$

314. a) A súlypontra vonatkozó képlet miatt a súlypont: $S\left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

b) Egy háromszög magasságpontja a magasságegyenesek metszéspontja. A magasságegyenes a háromszög valamely csúcsán átmenő, a szemközti oldalegyenesre merőleges egyenes. Könnyű látni, hogy az AB oldal párhuzamos az x tengellyel, így a hozzá tartozó (a C csúcson átmenő magasság) magasságegyenese: $x = 4$. A $\overrightarrow{BC}(-2;4)$ normálvektora az A csúcson átmenő magasságnak, így a normálvektoros egyenletet az A ismert ponttal alkalmazva:

$$-2x + 4y = (-2)\cdot(-2) + 4\cdot(-2), \text{ ebből } x - 2y = 2.$$

A két magasságegyenes metszéspontja $x = 4$, amiből $y = 1$ miatt: $M(4;1)$.

c) Egy háromszög köré írt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, hiszen egyenlő távolságra van a csúcsoktól. Az AB felezőmerőlegese az y tengellyel párhuzamos. Mivel a felezőpont

$$F\left(\frac{-2+6}{2}; -2\right) = F(2;-2);$$

így az egyenes: $x = 2$.

A BC felezési pontja $D(5;0)$, a rajta átmenő felezőmerőlegesnek $\overrightarrow{BC}(-2;4)$ normálvektora, így egyenlete:

$$-2x + 4y = -10, \text{ ebből } x - 2y = 5.$$

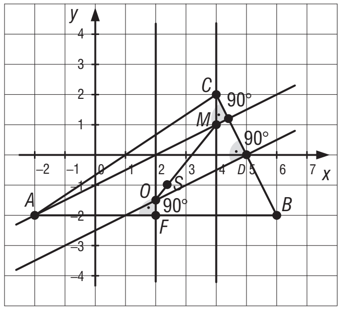
A két egyenes metszéspontja:

$$x = 2, \text{ amiből } y = -\frac{3}{2} \text{ miatt } O\left(2; -\frac{3}{2}\right).$$

d) Tekintsük az $\overrightarrow{OS}$, illetve $\overrightarrow{SM}$ vektorokat:

$$\overrightarrow{OS}\left(\frac{8}{3} - 2; -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) = \overrightarrow{OS}\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right); \ \overrightarrow{SM}\left(4 - \frac{8}{3}; 1 + \frac{2}{3}\right) = \overrightarrow{SM}\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)!$$

Leolvasható, hogy $2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{SM}$, amiből nemcsak az állítás olvasható le, hanem az is, hogy S az OM szakaszt 1 : 2 arányban osztja két részre. (Ez minden háromszögben így van, neve: Euler-egyenes.)



315. Mivel a két egyenesnek az $\vec{n}(5;-12)$ vektor egyaránt normálvektora, ezért az egyenesek valóban párhuzamosak. A két egyenes távolsága megadja a négyzet oldalának hosszát! Válasszuk az első egyenesnek azt a pontját, melynek első koordinátája $x = 26,$ ekkor a második koordináta:

$$y = \frac{6 \cdot 26}{12} = 13.$$

Az így kapott $(26;13)$ pontnak az $5x - 12y - 65 = 0$ egyenestől vett távolsága megadja a négyzet oldalhosszúságát. A **303.** feladatban látott pont-egyenes távolságképletet használva:

$$d = \frac{|5 \cdot 26 + (-12) \cdot 13 - 65|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{91}{13} = 7;$$

így a terület 49 területegység.

316. a) Az ábra jelöléseit használjuk. A két pont távolságára vonatkozó képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$c = 5,\ a = 10,\ b = \sqrt{97} \approx 9{,}85.$

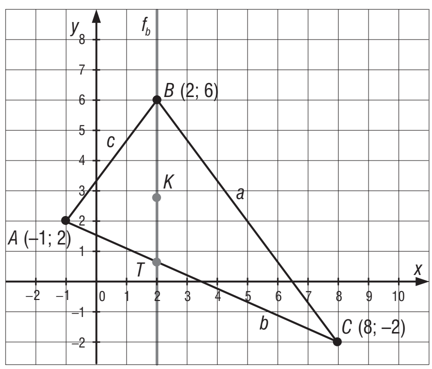
A szögfelező tétel szerint

$\frac{AT}{TC} = \frac{c}{a}.$ Az osztópont koordinátáiról tanultak alapján

$$T\left(\frac{a \cdot a_1 + c \cdot c_1}{a + c}; \frac{a \cdot a_2 + c \cdot c_2}{a + c}\right).$$

A konkrét adatokkal $T\left(2; \frac{2}{3}\right).$

A T és B első koordinátája egyenlő, így a szögfelező egyenlete: $x = 2.$



b) A szögfelező tétel következményeként $AT=\dfrac{cb}{a+c}$. Ha K a beírt kör középpontja, akkor az AK egyenes szögfelező. A szögfelező tétel szerint

$$\frac{TK}{KB}=\frac{AT}{c}=\frac{\frac{cb}{a+c}}{c}=\frac{b}{a+c}.$$

Az osztópont koordinátáira vonatkozó tétel alapján:

$$K\left(\frac{a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1}{a+b+c};\frac{a\cdot a_2+b\cdot b_2+c\cdot c_2}{a+b+c}\right).$$

A konkrét adatokkal $K\left(2;\dfrac{10+6\sqrt{97}}{15+\sqrt{97}}\right)$, közelítően $K(2;2,78)$.

317. Általánosan számolunk azért, hogy általánosan használható eredményt kapjunk.

$$e: ax+by=c,\ a^2+b^2\neq 0,$$
$$P(x_0,y_0).$$

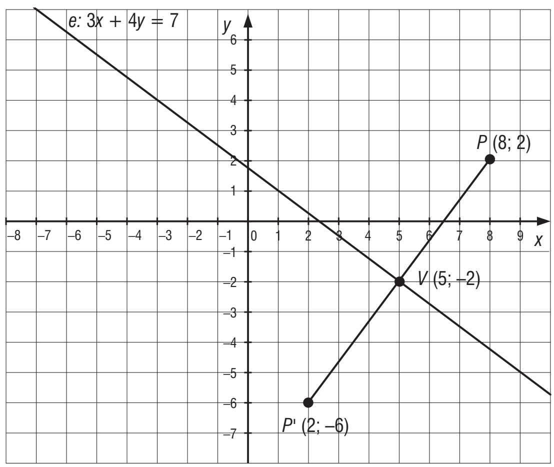
A P-re illeszkedő, e-re merőleges f egyenes egyenlete: $f: bx-ay=bx_0-ay_0$.

a) A keresett merőleges az e és f egyenesek metszéspontja, amelynek koordinátáit az egyenletükből álló egyenletrendszer megoldása adja.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ bx-ay=bx_0-ay_0 \end{cases}$$

Az 1. egyenlet a-szorosát és a 2. egyenlet b-szeresét összeadva kapjuk, hogy

$$x=\frac{ac+b^2x_0-aby_0}{a^2+b^2}.$$



Az 1. egyenlet b-szereséből kivonva a 2. egyenlet a-szorosát kapjuk, hogy

$$y=\frac{bc-abx_0+a^2y_0}{a^2+b^2}.$$

Így a merőleges vetület:

$$V\left(\frac{ac+b^2x_0-aby_0}{a^2+b^2};\frac{bc-abx_0+a^2y_0}{a^2+b^2}\right).$$

A konkrét adatokat behelyettesítve: $V(5;-2)$.

b) A keresett P' és a P pont által meghatározott szakasz felezőpontja V. A felezőpont koordinátáiról tanultak alapján:

$$P'\left(\frac{-a^2x_0+2ac-2aby_0+b^2x_0}{a^2+b^2};\frac{a^2y_0+2bc-b^2y_0-2abx_0}{a^2+b^2}\right).$$

Konkrét adatokkal: $P'(2;-6)$.

318. Két egyenes hajlásszöge legegyszerűbben úgy határozható meg, ha figyelembe vesszük, hogy hajlásszögük vagy irányvektoraik szöge, vagy (ha a szög tompaszög) a vektorok által bezárt szög kiegészítő szöge. Az irányvektoros egyenlet miatt könnyen leolvasható a két egyenes egy-egy irányvektora: $\vec{v}_e(2;1)$ és $\vec{v}_f(-3;1)$.
A $\vec{v}_e(x_1;y_1)$ és $\vec{v}_f(x_2;y_2)$ vektorok hajlásszögét skaláris szorzatuk segítségével kaphatjuk meg:

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=\left|\vec{v}_e\right|\cdot\left|\vec{v}_f\right|\cdot\cos\varphi=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot\cos\varphi=x_1x_2+y_1y_2$$

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

ahonnan behelyettesítés után:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-3)+1\cdot1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ ebből }\varphi=135°,$$

ezért az egyenesek hajlásszöge $180°-135°=45°$.

3.3. Körök

319. Mivel az origó középpontú körök egyenletének általános alakja: $x^2+y^2=r^2$, ahol r a kör sugara, ezért az egyenlet: $x^2+y^2=3$.

320. Mivel az $(u;v)$ középpontú, r sugarú kör általános egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$, ezért a keresett egyenlet: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

321. Behelyettesítve az általános egyenletbe: $(x+3)^2+(y+4)^2=25$.

322. Teljes négyzeteket alakítunk ki, tehát $(x-u)^2$, illetve $(y-v)^2$ alakú kifejezéseket, ahol u és v értékét úgy választjuk meg, hogy az x-ek, illetve y-ok száma a feladatban szereplő legyen, amihez az $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ azonosságot kell ismerni:

$$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+1=0, \text{ ebből } (x-1)^2+(y+3)^2=3^2,$$

ezért a középpont, illetve a sugár: $K(1;-3)$ és $r=3$ egység.

323. Az előző feladatban mondottak szerint eljárva:

$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0, \text{ ebből } x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

ahonnan $K\left(0;\frac{5}{2}\right)$ és $r=\frac{5}{2}$ egység.

324. A teljes négyzetek kialakítása után: $(x+1)^2+(y+2)^2=0$, de ilyen kör nem létezik, hiszen a sugár nagysága nem lehet 0.

325. Az **322.** feladatban elmondott eljárást alkalmazva:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=0, \text{ ebből } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4,$$

ahonnan $K\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ és $r=2$ egység.

326. $(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+14=0$, ebből $(x+2)^2+(y-3)^2=-1$,
ami nem lehetséges, tehát nincs megfelelő kör.

327. Először meghatározzuk a kör középpontját és sugarát:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1, \text{ ebből } K(-1;1);\ r=1.$$

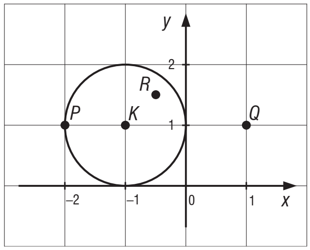
Az egyes pontoknak a kör középpontjától vett távolságait összevetve a sugárral könnyen adódnak a válaszok.

a) $PK=\sqrt{(-2+1)^2+(1-1)^2}=1=r.$ Ebből következik, hogy P rajta van a körön.

b) $QK=\sqrt{(1+1)^2+(1-1)^2}=2>r.$ Ebből következik, hogy Q kívül van a körön.

c) $RK=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<r.$ Ebből következik, hogy R belül van a körön.

d)



328. a) A megfelelő pontok a C középpontú és 10 egység sugarú körvonalon vannak, melynek egyenlete: $(x+2)^2+(y-3)^2=100$.

b) Mivel $CP=\sqrt{(-2-3)^2+(3+9)^2}=\sqrt{169}=13$, így nem volt hallható a robbantás.

c) Mivel ennek a településnek a távolsága C-től 9 egység, ezért itt hallható volt a robbantás.

329. Mivel $x^2+y^2+4x+8y+4=0$, ebből $(x+2)^2+(y+4)^2=4^2$; ezért a keresett kör középpontja $K(-2;-4)$, sugara pedig 2 egység, így az egyenlete: $(x+2)^2+(y+4)^2=2^2$.

330. Két ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese. Az AB szakasz felezőmerőlegesének egy pontja az $F(0;5)$, normálvektora $\overrightarrow{AB}(-4;8)$. Ebből következően a szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:

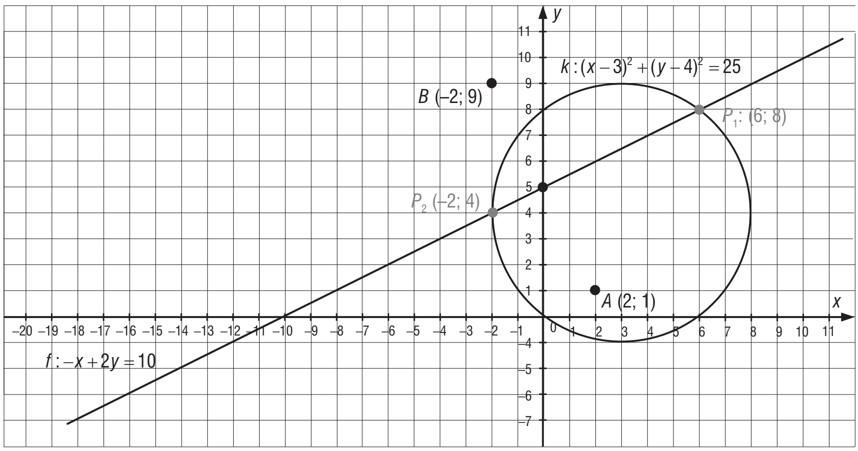
$$f:-x+2y=10.$$

A keresett pontok koordinátáit a kör és a szakasz felezőmerőlegesének egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai adják.

$$\begin{cases}-x+2y=10\\ \underline{(x-3)^2+(y-4)^2=25}\end{cases}$$

Az első egyenletből: $x=2y-10$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$(2y-13)^2+(y-4)^2=25,$$
$$4y^2-52y+169+y^2-8y+16=25,$$
$$5y^2-60y+160=0,$$
$$y^2-12y+32=0,$$
$$y_1=4,\ y_2=8,$$
$$x_1=-2,\ x_2=6,$$
$$P_1(-2;4),\ P_2(6;8).$$



331. Ha megoldjuk a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert, akkor megkapjuk a két ponthalmaz közös pontjait, az ezeket összekötő húr hossza a távolságképletből határozható meg.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=25,\\ y=2x+1.\end{cases}$$

Behelyettesítve y-t:

$$(x-1)^2+(2x+3)^2=25, \text{ ebből } x^2-2x+1+4x^2+12x+9=25,$$

ahonnan

$$5x^2+10x-15=0, \text{ ebből } x^2+2x-3=0.$$

Innen $x_1=1$, amiből $y_1=3$ és $x_2=-3$, amiből $y_2=-5$.

A közös pontok tehát $A(1;3)$ és $B(-3;-5)$. A távolságképlet miatt:

$$AB=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\approx 8{,}94 \text{ egység.}$$

332. Ha megoldjuk a két kör egyenletéből álló

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=0, \\ x^2+y^2+4x+8y+4=0. \end{cases}$$

egyenletrendszert, akkor az $(x;y)$ megoldások számából kiderül, hogy hány közös pont van.

A második egyenletből kivonva az elsőt a másodfokú tagok ki fognak esni:

$$10x+16y+4=0, \text{ ebből } x=-1,6y-0,4.$$

Az első egyenletbe beírva:

$$(1,6y+0,4)^2+y^2+6(1,6y+0,4)-8y=0,$$

$$2,56y^2+1,28y+0,16+y^2+9,6y+2,4-8y=0,$$

$$3,56y^2+2,88y+2,56=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa negatív, ezért az egyenletnek nincs valós megoldása, így a két körnek nincsen közös pontja.

333. a) Az adott középpontú és sugarú kör egyenlete: $(x-5)^2+(y-1)^2=10$, így a két kör egyenletéből álló egyenletrendszer a négyzetre emelések elvégzése és rendezés után:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-2y+16=0, \\ x^2+y^2-3x-3y-8=0. \end{cases}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$7x-y-24=0, \text{ ebből } y=7x-24,$$

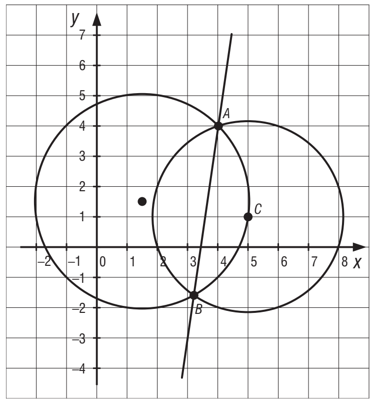
amit behelyettesítve a második egyenletbe, rendezés után:

$$5x^2-36x+64=0.$$

Ennek megoldásai: $x_1=4$, $x_2=\dfrac{16}{5}$, ahonnan a közös pontok:

$$A(4;4) \text{ és } B\left(\frac{16}{5};-\frac{8}{5}\right).$$

b) Mivel a közös húregyenes tartalmazza a két kör metszéspontjait, ezért a két kör egyenletének kivonása után kapott egyenlet lesz a közös húr egyenesének egyenlete: $y=7x-24$.



334. Mivel a kör középpontja: $K(3;2)$, továbbá az elemi geometriából tudjuk, hogy az érintőegyenes merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így $\overrightarrow{KP}(4;3)$ az érintő normálvektora. Alkalmazva a normálvektoros egyenletet:

$$4x+3y=4\cdot 7+3\cdot 5, \text{ ebből } 4x+3y=43.$$

335. Az egyik oldalegyenes-pár irányszöge 45°, a másik páré pedig 135° lesz, ezért egyenletüket a meredekséggel felírt formában keressük. A meredekség az irányszög tangense, így a két típus:

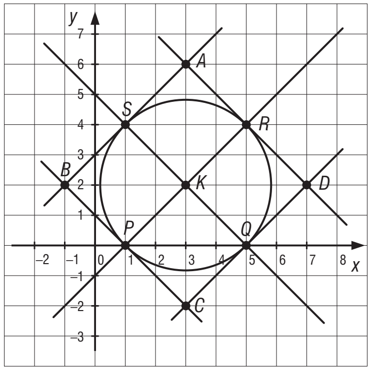
$$y=x+b; \text{ illetve } y=-x+c.$$

A kör középpontján átmenő, az oldalegyenesekkel párhuzamos két egyenes határozza meg az érintési pontokat, így a fentiek miatt, mivel a kör középpontja a $K(3;2)$ pont, a két egyenes:

$$y=x-1; \text{ illetve } y=-x+5.$$

Behelyettesítve a kör egyenletébe adódik a két-két érintési pont!

1. $(x-3)^2+(x-3)^2=8 \Rightarrow |x-3|=2$, ebből $x=5$ vagy $x=1$,
   ezért $P(1;0)$ és $R(5;4)$.
2. $(x-3)^2+(3-x)^2=8 \Leftrightarrow |x-3|=2$, ebből $x=5$ vagy $x=1$,
   ezért $S(1;4)$ és $Q(5;0)$.



Ezek után azonnal felírhatóak az oldalegyenesek egyenletei:

$$AD\colon\ y=-x+9;\ BC\colon\ y=-x+1;\ CD\colon\ y=x-5;\ AB\colon\ y=x+3.$$

c) A fenti egyenletekből könnyen adódnak a négyzet csúcsai:

$$A(3;6);\ B(-1;2);\ C(3;-2);\ D(7;2).$$

336. Az érintők merőlegesek az érintési pontokba húzott sugárra, ezért a kör középpontján átmenő, a megadott egyenesre merőleges egyenes ki fogja metszeni az érintési pontokat. Az adott egyenes $\vec{n}(4;3)$ normálvektora így ennek az egyenesnek irányvektora lesz, ezért az irányvektoros egyenletet a $K(4;2)$ középponttal felírva:

$$3x-4y=3\cdot4-4\cdot2, \text{ ebből } 3x-4y=4.$$

Innen

$$y=\frac{3}{4}x-1,$$

melyet beírva a kör egyenletébe:

$$(x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x-3\right)^2=25, \text{ ebből } x^2-8x+16+\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{2}x+9=25,$$

ahonnan

$$\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{2}x=0, \text{ ebből } \frac{25}{16}x(x-8)=0,$$

melynek gyökei:

$$x_1=0 \text{ és } x_2=8,$$

így az érintési pontok

$$E(0;-1) \text{ és } F(8;5).$$

A keresett érintőegyenesek egyenlete a normálvektorok egyezése miatt a normálvektoros egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, ha azt előbb az E, majd pedig az F pontra alkalmazzuk:

$$4x+3y=4\cdot0+3\cdot(-1), \text{ ebből } 4x+3y=-3,$$

$$4x+3y=4\cdot8+3\cdot5, \text{ ebből } 4x+3y=47.$$

337. Alkalmazzuk a pont-egyenes távolságképletet a kör sugarának meghatározására! Mivel az adott egyenes egyenlete felírható $x+2y+5=0$ alakban, így az elméletből ismert (és a **315.** feladatban igazolt) összefüggést alkalmazva:

$$r=\frac{\left|1\cdot(-3)+2\cdot 4+5\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

Ezért a kör egyenlete: $(x+3)^2+(y-4)^2=20.$

Megjegyzés:

A feladat megoldható úgy is, hogy előbb meghatározzuk az érintési pontot a K ponton átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletének felírásával, majd a két adott pontra vonatkozó távolságképletből számítjuk ki a kör sugarát.

338. a) A köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

Az AB oldalfelező merőlegese legyen f_c! Ennek pontja az AB szakasz felezőpontja $F_c\left(\frac{1}{2};4\right)$, normálvektora $\overrightarrow{AB}(3,4)$, egyenlete $3x+4y=\frac{35}{2}$.

Hasonlóképpen BC oldal felezőmerőlegesének, egyenlete $3x-4y=7$. A metszéspont koordinátáit a kapott egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja.

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $x=\frac{49}{12}$.

A két egyenletet kivonva kapjuk, hogy $y=\frac{21}{16}$. Így $O\left(\frac{49}{12};\frac{21}{16}\right)$.

A kör sugara $r=AO=\sqrt{\left(\frac{61}{12}\right)^2+\left(\frac{11}{16}\right)^2}=\sqrt{\frac{60\,625}{2304}}=\frac{25\sqrt{97}}{48}$.

A kör egyenlete: $\left(x-\frac{49}{12}\right)^2+\left(y-\frac{21}{16}\right)^2=\frac{60\,625}{2304}$.

b) Egy korábbi feladatban (lásd **316.** feladat) meghatároztuk a beírt kör középpontját: $K\left(2;\frac{10+6\sqrt{97}}{15+\sqrt{97}}\right)$, közelítően $K(2;2{,}78)$. Ugyancsak megadtuk a háromszög oldalait:

$$c=5,\ a=10,\ b=\sqrt{97}\approx 9{,}85.$$

A Heron-képlettel kapható a háromszög területe: $T=24$.

A beírt kör sugara: $\rho=\frac{T}{s}=\frac{24}{\frac{15+\sqrt{97}}{2}}=\frac{48}{15+\sqrt{97}}=\frac{48\left(15-\sqrt{97}\right)}{128}=\frac{3\left(15-\sqrt{97}\right)}{8}$.

A kör egyenlete: $(x-2)^2+\left(y-\frac{5\sqrt{97}-27}{8}\right)^2=\frac{1449-137\sqrt{97}}{32}$.

339. a) Az elemi geometriából tudjuk, hogy egy adott szakasz a szakasz mint átmérő fölé emelt körvonal pontjaiból látszik derékszögben (kivéve a szakasz végpontjait). Az ilyen kör neve: Thalész-kör. Meg kell tehát határoznunk az *AB* fölé emelt Thalész-körnek és a koordinátatengelyeknek a közös pontjait! Az *AB* felezési pontja, ami a kör középpontja lesz:

$$K\left(\frac{0+8}{2};\frac{1+7}{2}\right)=K(4;4).$$

Mivel

$$r^2=BK^2=(8-4)^2+(7-4)^2=25,$$

így a kör:

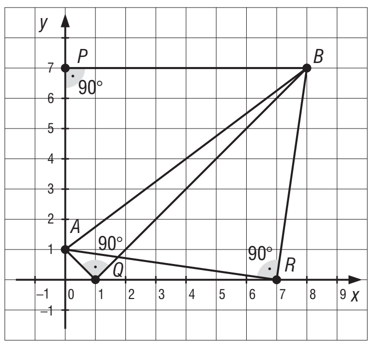
$$(x-4)^2+(y-4)^2=25.$$

Ha $x=0$, akkor az y, ha pedig $y=0$, akkor az x tengellyel vett metszéspontok adódnak. Ezért

$$x=0,\text{ ebből } |y-4|=3,\text{ amiből } y_1=7,\ y_2=1,$$
$$y=0,\text{ ebből } |x-4|=3,\text{ amiből } x_1=7,\ x_2=1.$$

Az *A* ponton kívül a következő pontok adódtak, melyek a feladat megoldásai lesznek: $P(0;7)$; $Q(1;0)$ és $R(7;0)$.

b)



340. A kör középpontja a $K(0;-2)$ pont. Az érintési pontokból a *KP* szakasz derékszögben látszik, ezért rajta vannak a *KP* fölé emelt Thalész-körön és az eredeti körön is, így meghatározhatjuk őket. A Thalész-kör középpontja a *KP* szakasz *F* felezőpontja:

$$F\left(\frac{0+5}{2};\frac{-2+3}{2}\right)=F\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right),$$

sugarára pedig

$$r^2=FP^2=\left(5-\frac{5}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2},$$

így egyenlete:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}, \text{ ebből } x^2+y^2-5x-y-6=0.$$

A két kör egyenletéből álló egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4y-1=0, \\ x^2+y^2-5x-y-6=0. \end{cases}$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat:

$$5x+5y+5=0, \text{ ebből } x=-y-1.$$

Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$(y+1)^2+y^2+4y-1=0, \text{ ebből } 2y^2+6y=0, \text{ ebből } 2y(y+3)=0,$$

amiből $y_1=0, y_2=-3$,

így az érintési pontok: $E_1(-1;0)$ és $E_2(2;-3)$. Az $\overrightarrow{E_1P}(6;3)$ és $\overrightarrow{E_2P}(3;6)$ az érintőegyenesek irányvektorai lesznek, ezért azok egyenletei:

$$3x-6y=-3, \text{ ebből } x-2y=-1,$$

$$6x-3y=12+9, \text{ ebből } 2x-y=7.$$

341. A feladat az ABC háromszög köré írt körének meghatározása. Az elemi geometriából ismert, hogy a köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Ennek meghatározása céljából felírjuk az AB, illetve BC oldalak felezőmerőlegeseinek egyenletét, majd megoldjuk az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert. Mivel A és B második koordinátája egyenlő, ezért AB párhuzamos az x tengellyel, így felezőmerőlegese az

$$x=\frac{-2+6}{2}=2$$

egyenes lesz. A BC felezőpontja:

$$F\left(\frac{-2+5}{2};\frac{4-3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right).$$

$\overrightarrow{CB}(-7;7)$ normálvektora a keresett egyenesnek, ezért annak egyenlete:

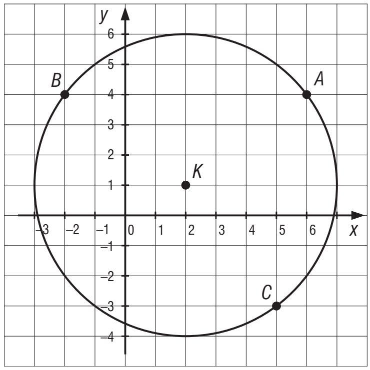
$$-7x+7y=-\frac{21}{2}+\frac{7}{2}=-7, \text{ ebből } x-y=1.$$

Mivel $x=2$, így $y=1$, ebből $K(2;1)$ a körgyűrű középpontja. A sugara:

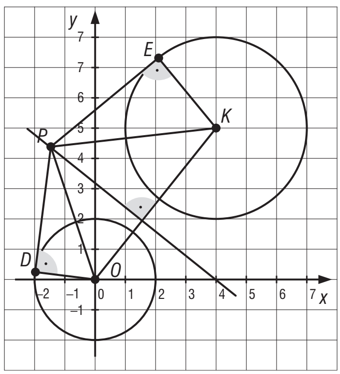
$$r=AK=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=5 \text{ egység}=20 \text{ km}.$$

b) A körgyűrű kerülete a kör kerületére vonatkozó képlet miatt:
$k=2\pi r=125{,}6$ km.

c)



342. Az első kör középpontja $K(4;5)$, sugara 3, a második kör középpontja az origó, sugara 2. Legyen $P(x;y)$ egy megfelelő pont a síkon, és tekintsük a köröket a koordináta-rendszerben!



A P ponból húzott érintőszakaszok által létrehozott PEK és PDO derékszögű háromszögek PE és PD befogói egyenlő hosszúak, így a négyzeteik is, ezért a Pitagorasz-tétel miatt:

$$PK^2-3^2=PO^2-2^2, \text{ ebből } (x-4)^2+(x-5)^2-9=x^2+y^2-4.$$

Innen

$$x^2-8x+16+y^2-10y+25-9=x^2+y^2-4,$$
$$36=8x+10y,$$
$$18=4x+5y.$$

Ebből nyomban leolvasható, hogy a keresett mértani hely egyenes, amely ráadásul merőleges a körök középpontját összekötő OK szakaszra. (Hiszen $\overrightarrow{OK}$ normálvektora az egyenesnek.)
Az elvégzett átalakítások visszafordíthatósága miatt az is igaz, hogy a fenti egyenes minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

Megjegyzés:
A fenti tulajdonságú egyenes neve: hatványvonal.

343. a) Átalakítva a görbe egyenletét:

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0, \text{ ebből } (x-1)^2+(y+2)^2=5^2.$$

Ebből azonnal látszik, hogy valóban körről van szó, melynek középpontja a $K(1;-2)$ pont, sugara pedig 5 egység.

b) Ha egy ponthalmazt olyan vektorral tolunk el, melynek koordinátái egész számok, akkor az alakzat rácspontjai rácspontokba mennek át, és a kapott alakzatnak pontosan ugyanannyi rácspontja van, mint az eredetinek, hiszen az eltolást ellenkező irányban is végre lehet hajtani! Ebből nyomban következik, hogy a feladatban szereplő körnek pontosan ugyanannyi rácspontja van, mint az origó középpontú, 5 egység sugarú $x^2+y^2=5^2$ egyenletű körnek. (Az eltolást a $\vec{v}(-1;2)$ vektor adja meg.) Tekintettel arra, hogy

$$25=0^2+5^2=3^2+4^2;$$

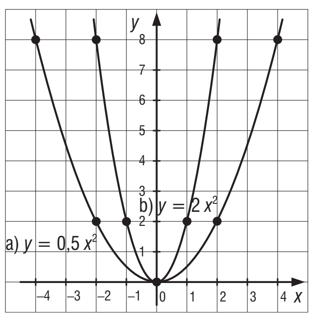
továbbá természetes számok négyzetének összegére (a tagok sorrendjétől eltekintve) könnyen látható módon máshogy nem bontható fel, így az összes lehetséges előjelezést figyelembe véve az alábbi rácspontok találhatók a körön:

$(0;5)$; $(5;0)$; $(0;-5)$; $(-5;0)$; $(3;4)$; $(4;3)$; $(-3;4)$; $(4;-3)$; $(3;-4)$; $(-4;3)$; $(-3;-4)$; $(-4;-3)$.

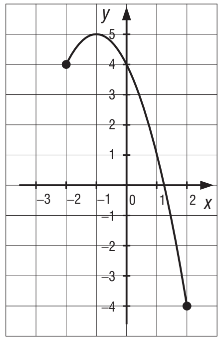
Mivel ezek száma 12, ezért pontosan ennyi rácspont található az eredeti körön is!

3.4. Parabolák

344. a) – b)



345. Mivel $y=-x^2-2x+4=-(x+1)^2+5$, ezért a grafikon:



346. Mivel az egyenes egyenletéből $y = 2x + 3$, ezért ezt beírva a parabola egyenletébe:

$$x^2 = 2x + 3, \text{ ebből } x^2 - 2x - 3 = 0;$$

melynek megoldásai $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, ezért a közös pontok $A(-1;1)$ és $B(3;9)$.

347. a) Átalakítva a pálya egyenletét:

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4 = 4 - (x-1)^2.$$

Ebből azonnal leolvasható hogy y értéke $x = 1$ esetén lesz maximális és $y_{\text{max}} = 4$, ezért a pálya csúcsa a $T(1;4)$ pont lesz.

b) A lövedék ott esik le, ahol $y = 0$ (és x nem negatív), azaz:

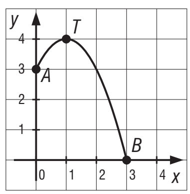
$$(x-1)^2 = 4, \text{ ebből } |x-1| = 2, \text{ amiből } x_1 = 3;\ x_2 = -1;$$

de ez utóbbi hely nem felel meg a feladat szövegének, így a becsapódási pont: $B(3;0)$.

c) Az AB távolságot a távolságképletből számíthatjuk ki:

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ egység.}$$

d)



348. Az érintő meredekségét a $P(x;y)$ pontban az $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosa adja meg: $f'(x) = -x + 2$, ezért az érintő meredeksége $m = -2$, így egyenlete felírható $y = -2x + b$ alakban. Mivel átmegy a P ponton, ezért b értéke behelyettesítéssel könnyen megkapható:

$$-1 = -8 + b, \text{ ebből } b = 7;$$

ezért az érintő egyenlete:

$$y = -2x + 7.$$

349. a) Meg fogjuk határozni a parabola azon érintőjét, amely párhuzamos az adott egyenessel. Az érintési pontnak az adott egyenestől vett távolsága (merőleges szakasz) lesz a parabola és az adott egyenes távolsága. Mivel

$$y = x^2 - 6x + 7, \text{ ebből } y' = 2x - 6;$$

a parabola valamely $P(x; y)$ pontjához tartozó érintőegyenes meredeksége, és ez párhuzamos a megadott egyenessel, ezért meredekségük egyenlő:

$$2x - 6 = 4, \text{ ebből } x = 5;$$

így az érintési pont: $P(5; 2)$.

b) Az érintő egyenes egyenlete $y = 4x + b$ alakban írható, és mivel átmegy a P ponton, ezért

$$2 = 4 \cdot 5 + b, \text{ ebből } b = -18;$$

miatt egyenlete:

$$y = 4x - 18.$$

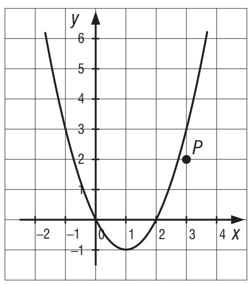
c) A minimális távolság kiszámításához a pont-egyenes távolságképletet használjuk fel, amihez az adott egyenes egyenletét írjuk

$$4x - y - 35 = 0$$

alakba. Behelyettesítve:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 35|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ egység.}$$

350. a) Mivel $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, így a grafikon:



b) Keressük a megfelelő érintő egyenletét $y = mx + b$ alakban. Mivel átmegy a P ponton, ezért

$$2 = 3m + b, \text{ ebből } b = 2 - 3m, \text{ amiből } y = mx + 2 - 3m$$

alakban is írható az egyenlet. A P ponton átmenő, az y tengellyel nem párhuzamos egyenesek közül az lesz érintő, amelyre igaz, hogy a parabola és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszernek egy adott m-re pontosan egy megoldása van. Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = mx + 2 - 3m; \end{cases}$$

ahonnan

$$x^2 - 2x = mx + 2 - 3m, \text{ ebből } x^2 - (m+2)x + 3m - 2 = 0.$$

Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor lesz egy megoldása, ha diszkriminánsa 0, így

$$(m+2)^2 - 4(3m-2) = 0, \text{ ebből } m^2 - 8m + 12 = 0;$$

melynek megoldásai:

$$m_1 = 2, m_2 = 6.$$

Két érintő felel meg:

$$y = 2x - 4; \text{ illetve } y = 6x - 16.$$

351. a) Tekintsük a parabola egy általános helyzetű pontját: $P\left(x; \frac{1}{4}x^2\right)$! Az adott ponttól vett távolság pontosan ott lesz minimális, ahol a távolság négyzete minimális, így csak azzal foglalkozunk. A távolságképletet alkalmazva:

$$PQ^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 5\right)^2 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 25 = \frac{1}{16}\left(x^4 - 24x^2\right) + 25 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(x^2 - 12\right)^2 - 144\right] + 25;$$

ahonnan

$$PQ^2 = \frac{1}{16}\left(x^2 - 12\right)^2 - 9 + 25 = \frac{1}{16}\left(x^2 - 12\right)^2 + 16 \geq 16;$$

$$PQ \geq 4.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x^2 = 12$, ebből $x = 2\sqrt{3}$ vagy $x = -2\sqrt{3}$. Két megfelelő pont van tehát: $A\left(2\sqrt{3}; 3\right)$ és $B\left(-2\sqrt{3}; 3\right)$.

b) A minimális távolság 4 egység.

352. Legyen $P(x, y)$! Ekkor

$$d_{PA} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$d_{Pf} = |y + 2|$$

a) $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 2|y + 2|$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát (nemnegatívak)!

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4y^2 + 16y + 16$$

$$x^2 - 3y^2 - 20y - 12 = 0$$

Látható, hogy a kapott ponthalmaz nem kör, hiszen a másodfokú tagok együtthatója nem egyenlő, nem valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos tengelyű parabola, hiszen mindkét ismeretlen másodfokon szerepel. Ez a görbe nem szerepel a középiskolában tanult ponthalmazok között (hiperbola).

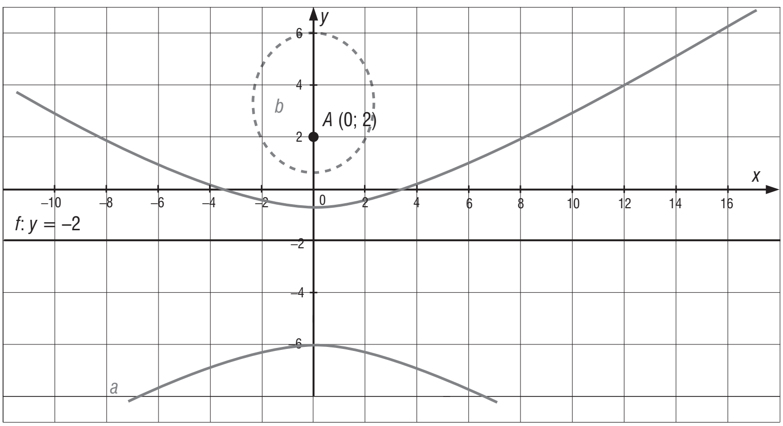
b) $2\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=|y+2|$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát (nemnegatívak)!

$$4x^2+4y^2-16y+16=y^2+4y+4$$

$$4x^2+3y^2-20y+12=0$$

Látható, hogy a kapott ponthalmaz nem kör, hiszen a másodfokú tagok együtthatója nem egyenlő, nem valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos tengelyű parabola, hiszen mindkét ismeretlen másodfokon szerepel. Ez a görbe nem szerepel a középiskolában tanult ponthalmazok között (ellipszis).



4. Valószínűségszámítás – megoldások

4.1. Esemény-algebra

353. Mivel a dobás eredménye vagy páros vagy páratlan, ezért a két esemény összege a biztos esemény.

354. A két esemény szorzata az az esemény, hogy piros királyt, piros ászt, zöld királyt vagy zöld ászt húzunk. Mivel minden lap kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, ezért a szorzatesemény valószínűsége: $P(A \cdot B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

355. Az *A–B* esemény az az esemény, hogy a húzott golyó száma hárommal osztható, de nem páratlan (azaz páros), tehát az az esemény, hogy a golyó száma 6-tal osztható. Ennek a valószínűsége (mivel minden golyó kihúzásának egyenlő a valószínűsége):

$$P(A-B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

ugyanis 5 darab 6-tal osztható sorszámú golyó van az urnában.

356. Az állítás nem igaz. Legyen például a kockadobás esetén *A* esemény az, hogy 2-est dobunk, *B* esemény pedig, hogy 3-ast dobunk! A két esemény kizárja egymást, de összegük nem a biztos esemény.

357. Nem igaz, ugyanis a két esemény szorzata az az esemény, hogy a három lap azonos színű, de páronként különböző figura. Ez pedig nem lehetetlen.

358. Az összes lehetséges dobássorozat száma 2^{10}, amiből összesen 2 a kedvező (a csupa fej, illetve a csupa írás sorozat). Így a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} \approx 0,00195.$$

359. A kísérletnek $2^5 = 32$ különböző kimenetele lehetséges (ennyi 5 hosszúságú fej-írás sorozat van). A kedvező esetek kétfélék, vagy mindegyik dobás fej, vagy 4 fej és 1 írás. Ezen esetek száma: $1+5=6$. Azaz a kérdezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

360. A kísérletnek $2^3 = 8$ különböző kimenetele lehetséges (ennyi 3 hosszúságú fej-írás sorozat van). A kedvező esetek pedig két kategóriába sorolhatók aszerint, hogy 2-szer dobunk fejet és egyszer írást, illetve a másik eset, ha 3-szor fejet dobunk. Az első 3 módon, a második egyféleképpen következhet be. Azaz a kérdezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}.$$

361. A hat lehetséges dobás közül 2 db 3-mal osztható (3 és a 6), azaz a kérdezett valószínűség a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa:

$$P(A) = \frac{2^7}{6^7} \approx 0{,}00046.$$

362. A lehetséges kimenetelek száma 36, ebből Lacinak kedvez, ha mindketten páratlan számot dobnak, azaz 9 eset, a többi 27 pedig Katinak kedvező. Azaz Kati nyerési esélyei a jobbak.

363. A szorzat pontosan akkor osztható hárommal, ha legalább az egyik dobott szám osztható hárommal. Mindkét feltétel akkor teljesül, ha mindkét dobott szám osztható hárommal. Ez a lehetséges 36 esetből négyféleképpen következhet be. Azaz Lilla esélye a győzelemre $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, míg Rudi esélye $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

364. Jelölje A azt az eseményt, hogy a két szám szorzata osztható 3-mal, B pedig azt, hogy a két szám összege osztható 3-mal! A kérdés tehát $P(A+B)$. Az összegesemény valószínűsége:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B),$$

ahol, mivel a szorzat pontosan akkor nem osztható hárommal, ha egyik tényező se osztható hárommal $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4 \cdot 4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; $P(A \cdot B)$-t pedig az előző feladatban számoltuk: $P(A \cdot B) = \frac{1}{9}$.

Így a kérdezett valószínűség:

$$P(A+B) = \frac{7}{9}.$$

Azaz Lilla esélye a győzelemre $\frac{7}{9}$, míg Rudi esélye csupán $\frac{2}{9}$.

365. A lehetséges húzások száma $\binom{32}{4} = 35960$. Ezek közül a kedvező esetek száma $\binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} = 8^4 = 4096$, ugyanis minden színnek szerepelnie kell, és mindegyik színből nyolcféleképpen választhatjuk meg a húzott lapot. Azaz a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{4096}{35960} \approx 0,1139.$$

366. A lehetséges húzások száma $\binom{52}{3} = 22100$. A kedvező esetek száma pedig: $\binom{4}{3} \cdot 13^3$, mivel először kiválasztjuk a három színt a négy lehetőség közül, majd mindegyik színhez tizenháromféleképpen rendelünk figurát. Azaz a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{8788}{22100} \approx 0,3976.$$

367. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 piros lesz a 32-ből választott 8 lap közt:

$$P(A) = \frac{\binom{24}{8} + \binom{24}{7} \cdot \binom{8}{1} + \binom{24}{6} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{8}} \approx 0,69,$$

míg a komplementer esemény valószínűsége:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,31.$$

Azaz Kriszta esélye a győzelemre nagyobb.

368. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy nincs király az osztásban:

$$P(A) = \frac{\binom{48}{6}}{\binom{52}{6}} \approx 0,603,$$

míg a komplementer esemény valószínűsége:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,397.$$

Azaz Verának nagyobb az esélye a győzelemre.

369. A lehetséges kimenetelek száma $6^2 = 36$, ezek közül kedvező $3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$; azaz a kérdezett valószínűség: $P = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

370. Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét (azaz annak a valószínűségét, hogy mind azonos címletűek):

$$1 - P(A) = P(\overline{A}) = \frac{3^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3}{8^3} = \frac{44}{512}, \text{ ebből } P(A) = \frac{468}{512}!$$

371. A három színt négyféleképpen választhatjuk ki a négy közül, továbbá a három színből 3! = 6 színsorrend készíthető. Az azonos színű golyókat is megkülönböztetjük, így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{3!\cdot(2\cdot3\cdot3 + 2\cdot3\cdot1 + 2\cdot3\cdot1 + 3\cdot3\cdot1)}{9^3} = \frac{26}{81} \approx 0{,}32.$$

372. Sanyi győzelme akkor következhet be, ha a dobássorozat az alábbiak közül kerül ki: FIFI, FIIF, FIII, IFIF, IFII, IIFI, IIIF, IIII. Azaz a $2^4 = 16$ lehetséges dobás közül 8 kedvező Sanyinak, a másik nyolc pedig Pistának. Azaz a játék igazságos, mindkettőjüknek $\frac{1}{2}$ az esélye a győzelemre.

373. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben nyer a játékos! A kockák színei legyenek: piros, fehér és kék! Számoljuk össze azokat az eseteket, amikor pontosan két 6-os dobás van! A két hatos színét $\binom{3}{2} = 3$ különböző módon választhatjuk meg, a harmadik kocka 1-től 5-ig bármit mutathat. Ez eddig $3\cdot5 = 15$ lehetőség. Ehhez jön még az az eset, amikor mindhárom dobás 6-os. Azaz összesen 16 esetben nyer a játékos a lehetséges $6^3 = 216$ esetből. A nyerés valószínűsége tehát: $\frac{16}{216} \approx 0{,}074$.
A lehetséges nyerési szituációk részletesen:

1,6,6	6,1,6	6,6,1	6,6,6
2,6,6	6,2,6	6,6,2	
3,6,6	6,3,6	6,6,3	
4,6,6	6,4,6	6,6,4	
5,6,6	6,5,6	6,6,5	

A rendezett hármasokban az egyes értékek rendre a piros, kék, fehér kockákkal dobott számok.
Az összeg, azaz a nyeremény lehet:
13 (három eset), azaz $p_{13} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ valószínűséggel,

14 (három eset), azaz $p_{14} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ valószínűséggel,

15 (három eset), azaz $p_{15} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ valószínűséggel,

16 (három eset), azaz $p_{16} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ valószínűséggel,

17 (három eset), azaz $p_{17} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ valószínűséggel,

18 (egy eset), azaz $p_{18} = \frac{1}{216}$ valószínűséggel.

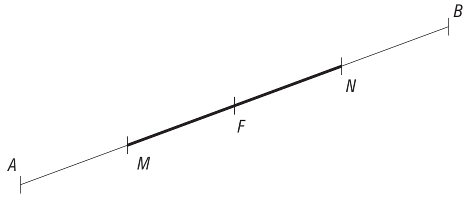
374. Az összes sorrend száma: $5! = 120$.
A „jó” sorrendek:
21453, 21534, 23154, 23451, 23514, 24153, 24513, 24531, 25134, 25413, 25431, 31254, 31452, 31524, 34152, 34251, 34512, 24521, 35124, 35214, 35412, 35421, 41253, 41523, 41532, 43152, 43251, 43512, 43521, 45123, 45132, 45213, 45231, 51234, 51423, 51432, 53124, 53214, 53412, 53421, 54123, 54132, 54213, 54231.
A kedvező esetek száma 44.
A keresett valószínűség: $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$.

4.2. Geometriai valószínűség

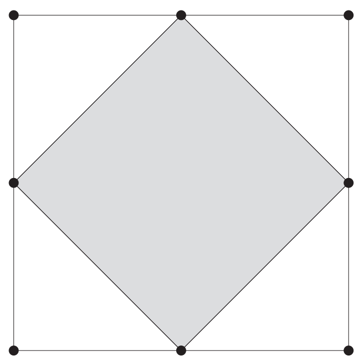
375. Azok a számok, amelyek a feladatban szereplő feltételt teljesítik, éppen a $[0,3;1[$ intervallum elemei. A geometriai valószínűségi modell alapján akkor a kérdezett valószínűség: $P = \frac{0,7}{1} = 0,7$.

376. Az alábbi halmaz az a részhalmaza a $[2,15[$ intervallumnak, ahonnan a valós számot választva a feltétel teljesül: $[3,4[\cup[6,7[\cup[9,10[\cup[12,13[$.
Ezen intervallumok hosszának összege 4 egység, míg az alaphalmaz hossza 13 egység, így a kérdezett valószínűség $P = \frac{4}{13}$.

377. Az intervallumot jelölje *AB*, felezőpontját *F*. A szakasz negyedelőpontjai (*A*-tól *B* felé haladva) rendre: *M*, *F*, *N*. A feltételnek az *MN* szakasz belső pontjai felelnek meg, amely szakasz hossza az *AB* hosszának fele. Azaz a kérdezett valószínűség 0,5.



378. A kis négyzet területe a nagy négyzet területének fele, így a kérdezett valószínűség 0,5.



379. Akkor lesz mindkettő kétszínű, ha a kettévágás helye a középső (kék) részbe esik, aminek a valószínűsége: $P = \frac{80}{200} = 0,4.$

380. Egy dobás esetén annak a valószínűsége, hogy „bull's eye"-t dobjon:

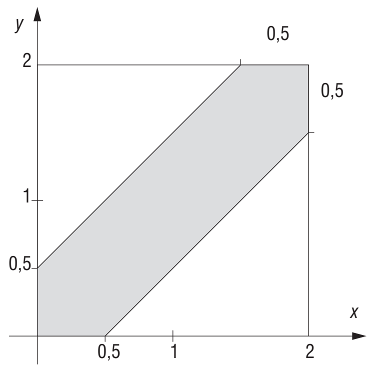
$$P(A) = \frac{2^2 \cdot \pi}{22,5^2 \cdot \pi} = 0,0079.$$

Így a kérdezett valószínűség:

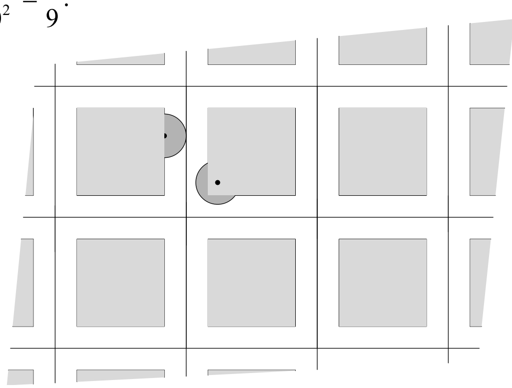
$$P = \binom{3}{2} \cdot 0,0079^2 \cdot (1 - 0,0079) + \binom{3}{3} \cdot 0,0079^3 = 0,000186.$$

381. A lift pályája szemléltethető a $[0,28]$ intervallummal (ugyanis a lift pillanatnyi helyzete leírható a padlójának a fölszinttől mért távolságával, ez pedig ebben az intervallumban van). Ebben az intervallumban a nekünk „megfelelő" helyzetek minden szinten 1 egységnyi intervallumban helyezkednek el. Azaz a kérdéses valószínűség: $P = \frac{6 \cdot 1}{28} = \frac{3}{14}.$

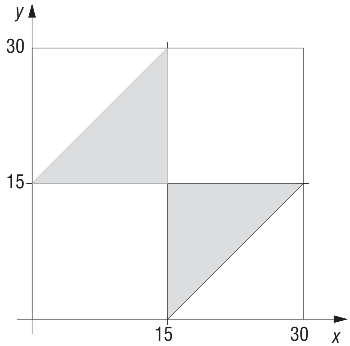
382. Az eseményterünk a koordináta-rendszerben ábrázolva egy kétszer kettes négyzet. (Egy pont első koordinátája az egyik ember késése 8 órához képest órában kifejezve, míg a pont második koordinátája a másik ember megfelelő értéke.) Az ábrán a satírozott részben lévő pontok felelnek meg olyan eseménynek, amikor embereink találkoznak (azok a pontok, melyeknek koordinátáira $|x-y| \le 0,5$). Ennek a területe: $4-1,5^2 = 1,75$, azaz a kérdezett valószínűség: $P = \frac{1,75}{4} = 0,4375$.



383. A kör középpontját tetszőlegesen választhatjuk, a megfelelő választások az ábrán satírozott részekről valók. Ezek területének aránya a teljes területhez, azaz a valószínűség: $P = \frac{20^2}{30^2} = \frac{4}{9}$.



384. Az eseményterünk egy 30-szor 30-as négyzet a koordináta-rendszerben, ahol egy eseménynek megfelelő pont első koordinátája az első, míg második koordinátája a második kiválasztott pont, a pálca bal végétől mért távolsága centiméterekben. A megfelelő szakaszok akkor teljesítik a háromszög-egyenlőtlenséget (azaz bármely két szakasz hosszának összege nagyobb a harmadik szakasz hosszánál), ha a satírozott részből választott pont felel meg az eseménynek. Azaz a kérdezett valószínűség: $\frac{1}{4}$.



385. Definíció szerint, ha $P(A) \neq 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Ide behelyettesítve az ismert értékeket:

$$P(A \cdot B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

ennyi a kérdezett valószínűség.

386. Definíció szerint, ha $P(A) \neq 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Ide behelyettesítve az ismert értékeket:

$$P(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B|A)} = \frac{1}{2}.$$

387. Pontosan akkor lesz 5-ös találatunk, ha az eddig ki nem húzott 86 számból eltaláljuk az 5. nyerőszámot, így a kérdezett valószínűség: $P = \frac{1}{86} \approx 0,0116$.

388. Az ismert összefüggéseket felhasználva:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B),$$

ebből $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0,2;$

azaz a kérdezett feltételes valószínűség értéke, ha $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

389. Legyen A az az esemény, hogy egyszer sem húzunk fehéret, B pedig, hogy kéket és pirosat is húzunk legalább egyszer! Ekkor a kérdezett valószínűség, ha $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}; \text{ ahol: } P(B) = \frac{3! + 2 \cdot \binom{3}{1}}{3^3} = \frac{12}{27};$$

mivel a három színből képezhető három hosszú sorozatok száma 3^3, a kedvező eseteké pedig (amikor mindhárom szín csak egyszer fordul elő) $3! = 6$ eset, meg amikor valamelyik a piros és kék színek közül kétszer, míg a másik csak egyszer szerepel a sorozatban, de fehér nincs. A $P(A \cdot B) = \frac{2 \cdot \binom{3}{1}}{3^3} = \frac{6}{27}$ (ezek azok az esetek, amikor csak piros és kék húzás van, mindegyikből legalább egy). Így a kérdéses valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

390. Felhasználjuk a feltételes valószínűség kiszámítására vonatkozó összefüggést továbbá, hogy $P(B \cdot A) + P(B \cdot \overline{A}) = P(B)$:

$$0,7 = P\left(A \mid B\right) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0,3}{P(B)}, \text{ ebből } P(B) = \frac{3}{7}.$$

$$0,6 = P\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{P(B \cdot \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B \cdot \overline{A})}{1 - P(A)}, \text{ ebből } P(A) = \frac{0,6 - P(B \cdot \overline{A})}{0,6}.$$

De a fentiek alapján: $P(B \cdot \overline{A}) = P(B) - P(B \cdot A) = \frac{3}{7} - 0,3.$

Azaz $P(A) = \dfrac{0,6 - \left(\frac{3}{7} - 0,3\right)}{0,6} \approx 0,7857.$

391. A teljes valószínűség tételét alkalmazva adódik annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos dolog a holmik közül élelmiszer:

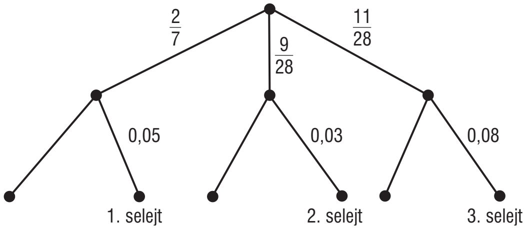
$$P = 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,28.$$

Azaz a holmijuk 28%-a az élelmiszer.

392. Rendeljünk hozzá a problémához egy fagráfot! Összesen 14 000 csavart gyártottak, így annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csavar az első, második, illetve harmadik gépsoron készült rendre

$$P(1.) = \frac{4000}{14000} = \frac{2}{7}; \; P(2.) = \frac{4500}{14000} = \frac{9}{28}; \; P(3.) = \frac{5500}{14000} = \frac{11}{28}.$$

Az átmenet-valószínűségeket feltüntetve az ágakon:



Annak a valószínűsége, hogy selejtes csavart választunk:

$$P(\text{selejt}) = \frac{2}{7}\cdot 0,05 + \frac{9}{28}\cdot 0,03 + \frac{11}{28}\cdot 0,08 \approx 0,055\,36.$$

Annak a valószínűsége, hogy a csavar a 2. gépsorról való és selejtes:

$$P(2.\ \text{selejt}) = \frac{9}{28}\cdot 0,03 \approx 0,009\,64;$$

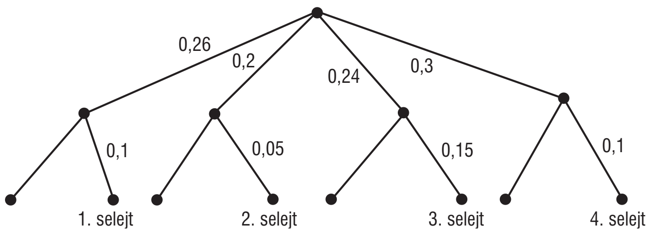
ezért annak a valószínűsége, hogy a selejt a 2. gyártósorról való:

$$P = \frac{0,009\,64}{0,055\,36} \approx 0,174.$$

393. A leglassabb műszak a második volt. Rendeljünk hozzá a problémához egy fagráfot! Összesen 500 dísztárgy készült, így annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott dísztárgy az első, második, harmadik, illetve negyedik műszakban készült rendre

$$P(1.) = \frac{130}{500} = 0,26;\ P(2.) = \frac{100}{500} = 0,2;\ P(3.) = \frac{120}{500} = 0,24;\ P(4.) = \frac{150}{500} = 0,3.$$

Az átmenet-valószínűségeket feltüntetve az ágakon:



Annak a valószínűsége, hogy selejtes (törött) darabot választunk:

$$P(\text{selejt}) = 0,26\cdot 0,1 + 0,2\cdot 0,05 + 0,24\cdot 0,15 + 0,3\cdot 0,1 = 0,102.$$

Annak a valószínűsége, hogy a dísztárgy a 2. műszakból való és selejtes:

$$P(2.\ \text{selejt}) = 0,2\cdot 0,05 = 0,01;$$

ezért annak a valószínűsége, hogy a selejt a leglassabb műszakban készült:

$$P = \frac{0,01}{0,102} \approx 0,098.$$

4.3. Várható érték, szórás

394. A valószínűségi változó lehetséges értékei és a megfelelő valószínűségek:

$$x_1 = 2,\ p_1 = \frac{1}{36};\ x_2 = 3,\ p_2 = \frac{2}{36};\ x_3 = 4,\ p_3 = \frac{3}{36};\ x_4 = 5,\ p_4 = \frac{4}{36};$$

$$x_5 = 6,\ p_5 = \frac{5}{36};\ x_6 = 7,\ p_6 = \frac{6}{36};\ x_7 = 8,\ p_7 = \frac{5}{36};\ x_8 = 9,\ p_8 = \frac{4}{36};$$

$$x_9 = 10,\ p_9 = \frac{3}{36};\ x_{10} = 11,\ p_{10} = \frac{2}{36};\ x_{11} = 12,\ p_{11} = \frac{1}{36};$$

Így a várható érték: $\sum_{i=1}^{11} x_i \cdot p_i = \frac{252}{36} = 7.$

395. A fejek száma lehet: 0, 1, 2, 3, 4, 5. A megfelelő valószínűségek:

$$x_0 = 0,\ p_0 = \frac{1}{2^5};\ x_1 = 1,\ p_1 = \frac{5}{2^5};\ x_2 = 2,\ p_2 = \frac{\binom{5}{2}}{2^5};\ x_3 = 3,\ p_3 = \frac{\binom{5}{3}}{2^5};$$

$$x_4 = 4,\ p_4 = \frac{\binom{5}{4}}{2^5};\ x_5 = 5,\ p_5 = \frac{1}{2^5}.$$

Így a várható érték: $\sum_{i=0}^{5} x_i \cdot p_i = \frac{80}{32} = 2,5.$

396. A királyok száma 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A megfelelő valószínűségek:

$$x_0 = 0,\ p_0 = \frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}};\ x_1 = 1,\ p_1 = \frac{\binom{28}{5}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{32}{6}};\ x_2 = 2,\ p_2 = \frac{\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{32}{6}};$$

$$x_3 = 3,\ p_3 = \frac{\binom{28}{3}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{32}{6}};\ x_4 = 4,\ p_4 = \frac{\binom{28}{2}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{32}{6}};\ x_5 = 5,\ p_5 = 0;\ x_6 = 6,\ p_6 = 0.$$

Így a várható érték: $\sum_{i=0}^{6} x_i \cdot p_i = \frac{\binom{28}{5}\cdot 4}{\binom{32}{6}} + 2\cdot\frac{\binom{28}{4}\cdot 6}{\binom{32}{6}} + 3\cdot\frac{\binom{28}{3}\cdot 4}{\binom{32}{6}} + 4\cdot\frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{6}} = 0,75.$

397. Felhasználva a **373.** feladatban szereplő értékeket, a várható értékre:

$$\sum_{i=0}^{6} x_i \cdot p_i = \frac{3\cdot(13+14+15+16+17)+18}{216} = \frac{243}{216} = \frac{9}{8}.$$

398. A várható érték: $\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = \frac{1+2+\ldots+6}{6} = 3,5;$

a szórás pedig: $\sqrt{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2+2^2+\ldots+6^2}{6} - 3,5^2} = 1,708.$

399. A valószínűségi változó (a fejek száma) a következő értékeket veheti fel: 0, 1, 2, 3.

A megfelelő valószínűségek: $p_0 = \frac{1}{8}$; $p_1 = \frac{3}{8}$; $p_2 = \frac{3}{8}$; $p_3 = \frac{1}{8}$.

Így a várható érték: $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot p_i = 1,5.$

A szórás pedig: $\sqrt{\sum_{i=0}^{3} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=0}^{3} x_i \cdot p_i\right)^2} = \sqrt{3-1,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

400. A feladat feltétele pontosan akkor teljesül, ha $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p = 0$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = 0$. Ez azt jelenti, hogy a pozitív valószínűségű x_i értéke csak 0 lehet. Tehát a valószínűségi változó olyan, hogy csak a 0 értéket veszi fel pozitív valószínűséggel, a többi értéket 0 valószínűséggel veszi fel.

401. A fejek számának eloszlása:

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{8}\right)^{10},\ P(X=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^{9}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{1},\ P(X=2) = \binom{10}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{2},\ \ldots,$$

$$P(X=i) = \binom{10}{i}\left(\frac{3}{8}\right)^{10-i}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{i}, i \in \{0,1,2,\ldots,10\}.$$

Így a várható érték: $E(X) = \sum_{i=0}^{10} i \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{10-i} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{i} = 6,25.$

402. Hasonlóan az előző feladat megoldásához, itt is binomiális eloszlású az írások számát megadó valószínűségi változó.

A várható érték tehát: $E(X) = \sum_{i=0}^{20} i \cdot \binom{20}{i} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{20-i} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{i} = 20 \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{9}.$

A szórás pedig: $D(X)=\sqrt{20\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}}=\frac{20}{9}$.

403. A szorzat lehetséges értékei: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16.

A megfelelő valószínűségek: $\frac{1}{16};\frac{2}{16};\frac{2}{16};\frac{3}{16};\frac{2}{16};\frac{2}{16};\frac{1}{16};\frac{2}{16};\frac{1}{16}$.

Azaz a várható érték: $E(X)=\frac{1+4+6+12+12+16+9+24+16}{16}=\frac{25}{4}$.

404. A lehetséges értékek: –1, 0, 1. A megfelelő valószínűségek: $\frac{2}{16};\frac{12}{16};\frac{2}{16}$.

A várható érték tehát: $E(X)=0$. A szórás pedig: $D(X)=\sqrt{\frac{4}{16}-0}=0,5$.

405. A kihúzott hármasunk négyféle lehet: 1, 2, 3 vagy 1, 2, 4 vagy 1, 3, 4 vagy 2, 3, 4. Mindegyik $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be. Így az átlag várható értéke:

$\frac{1}{4}\cdot\left(2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+3\right)=2,5$.

406. A kihúzott hármasunk tízféle lehet $\binom{5}{3}=10$. Ezek:

0, 1, 2 vagy 0, 1, 3 vagy 0, 1, 4 vagy 0, 2, 3 vagy 0, 2, 4 vagy 0, 3, 4 vagy 1, 2, 3 vagy 1, 2, 4 vagy 1, 3, 4 vagy 2, 3, 4. Mindegyik hármas egyformán valószínű, azaz a bekövetkezések valószínűsége $\frac{1}{10}$.

Így az átlag várható értéke: $\frac{1}{10}\cdot\left(1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+2+\frac{7}{3}+2+\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+3\right)=2$.

407. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}$. $A\cdot B$: A dobott szám hattal osztható.

Azaz $P(A)\cdot P(B)=P(A\cdot B)$, így A és B két független esemény.

408. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{6}$; $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}$. $A\cdot B=B$.

Azaz $P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cdot B)$, így A és B nem független események.

409. Bizonyítandó, hogy $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$. Felhasználva a De Morgan-azonosságokat, A és B függetlenségét és a komplementer esemény valószínűségéről ismerteket:

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cdot B))$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)=\big(1-P(A)\big)-P(B)\big(1-P(A)\big)=$$
$$=\big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}).$$

Azaz valóban $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$, ami a bizonyítandó volt.

410. Bizonyítandó, hogy $P(\overline{A}\cdot B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$. Felhasználva A és B függetlenségét és a komplementer esemény valószínűségéről ismerteket:

$$P(\overline{A}\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B)=P(B)-P(A)\cdot P(B);$$
$$P(\overline{A})\cdot P(B)=(1-P(A))\cdot P(B)=P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Azaz valóban $P(\overline{A}\cdot B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$, ami a bizonyítandó volt.

411. Modellválasztás szempontjából az a helyes, ha a golyókat megkülönbözetjük egymástól. Összesen $\binom{15}{6}$-féle módon húzhatunk ki 6 golyót visszatevés nélkül. A 3 piros golyót $\binom{5}{3}$-féle módon, a 3 fehér golyót pedig $\binom{10}{3}$-féle módon választhatjuk ki, így a kérdezett valószínűség:

$$P=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{15}{6}}\approx 0,24.$$

412. Modellválasztás szempontjából az a helyes, ha a golyókat megkülönbözetjük egymástól. Az összes húzássorozatok száma 15^6. Az, hogy a 3 piros golyó hányadikként került kihúzásra $\binom{6}{3}$-féle módon alakulhat, minden piros golyó ötféle, minden fehér golyó tízféle lehet, így a kérdezett valószínűség:

$$P=\frac{\binom{6}{3}\cdot 5^3\cdot 10^3}{15^6}\approx 0,22.$$

413. Modellválasztás szempontjából az a helyes, ha az érméket megkülönbözetjük egymástól, ezért összesen 2^6-féle eredménye lehet a kísérletnek. A kedvező kimenetelek száma $\binom{6}{2}$, így a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64} \approx 0,234.$$

414. a) Modellválasztás szempontjából az a helyes, ha a kockákat megkülönbözetjük egymástól. Összesen 6^k-féle eredménye lehet a kísérletnek. Pontosan egy 6-os dobást $k \cdot 5^{k-1}$-féle módon kaphatunk, hiszen a k darab kocka bármelyikével dobhatunk 6-ost, a többi kocka mindegyikén pedig ötféle szám adódhat. A kérdezett valószínűség ezért:

$$P_k = \frac{k \cdot 5^{k-1}}{6^k},$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{k+1}{k} > 1,$$

$$5k + 5 > 6k,$$

$$5 > k.$$

b) Vegyük észre, hogy

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{(k+1) \cdot 5^k}{6^{k+1}} \cdot \frac{6^k}{k \cdot 5^{k-1}} = \frac{5}{6}\left(1 + \frac{1}{k}\right)!$$

Ebből leolvasható, hogy $k < 5$ esetén $P_{k+1} > P_k$, míg $k > 5$ esetén $P_{k+1} < P_k$. Mivel $P_5 = P_6$, így ez azt jelenti, hogy a feladatban szereplő valószínűség $k = 5$ és $k = 6$ esetén lesz maximális. A maximum értéke:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,402.$$

415. Az összes különböző dobás száma 6^5. A 3-mal osztható szám 3-as vagy 6-os, ami 2 lehetőség, továbbá $\binom{5}{2}$-féle módon választható ki, hogy melyik két kockával dobtuk őket. A kérdezett valószínűség ezért

$$P = \frac{\binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot 4^3}{6^5} \approx 0,33.$$

416. Az számít kedvező kimenetelnek, ha 0, 1 vagy 2 alkalommal húzunk fehér golyót. A **412.** feladat megoldásában látott gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy

$$P = \frac{5^4 + \binom{4}{1} \cdot 3 \cdot 5^3 + \binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 5^2}{8^4} \approx 0,8484.$$

417. Az számít kedvező kimenetelnek, ha 0 vagy 1 alkalommal húzunk piros golyót. A **412.** feladat megoldásában látott gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy

$$P = \frac{5^5 + \binom{5}{1} \cdot 7 \cdot 5^4}{12^5} \approx 0,1.$$

418. Az összes különböző dobás száma 6^5. Felhasználva az **414.** a) feladat megoldásánál leírtakat, az számít kedvező kimenetelnek, ha pontosan 0, 1 vagy 2 darab kockával dobunk 6-ost. Ezeknek a száma rendre 5^5; $\binom{5}{1} \cdot 5^4$; illetve $\binom{5}{2} \cdot 5^3$. A kérdezett valószínűség ezért:

$$P = \frac{5^5 + \binom{5}{1} \cdot 5^4 + \binom{5}{2} \cdot 5^3}{6^5} \approx 0,96.$$

419. Az összes különböző dobás száma 6^5. Legalább 3-as dobásra minden kockán 4 lehetőség van, így számuk 4^5. Legalább 4-es dobásra minden kockán 3 lehetőség van, így számuk 3^5. Azoknak a kimeneteleknek a száma, ahol a legkisebb dobott szám a 3, a fenti két szám különbsége! A kérdezett valószínűség ezért:

$$P = \frac{4^5 - 3^5}{6^5} \approx 0,1.$$

5. Bizonyítási módszerek – megoldások

5.1. Teljes indukció

420. Az állítás $n=1$ esetén nyilván igaz. Tegyük fel, hogy az állítás valamely n-re igaz! Be kell látnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$1+3+5+\ldots+2n-1+2n+1=(n+1)^2.$$

Az indukciós feltevés miatt elegendő igazolnunk, hogy

$$n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

ami nyilvánvaló.

Megjegyzés:

Természetesen a feladat számos más módon is megoldható.

421. Az állítás $n=1$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy az állítás valamely n-re igaz! Be kell látnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n+1)^3=(n+1)^2\left(2(n+1)^2-1\right).$$

Az indukciós feltevés felhasználásával a bizonyítandó:

$$n^2\left(2n^2-1\right)+(2n+1)^3=(n+1)^2\left(2n^2+4n+1\right).$$

Mindkét oldalon elvégezve a műveleteket:

$$2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1=\left(n^2+2n+1\right)\left(2n^2+4n+1\right),$$

$$2n^4+8n^3+11n^2+6n+1=2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1,$$

ami jól láthatóan azonosság, így a feladat állítását igazoltuk.

422. A kifejezés értéke $n=1$ esetén 18, így az állítás igaz. Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás valamely n-re igaz! Be kell látnunk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$4^{n+1}+15(n+1)-1$$

osztható 9-cel.

Mivel

$$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\left(4^n+15n-1\right)-45n+18,$$

ahol az indukciós feltevés miatt mindhárom tag osztható 9-cel, így készen vagyunk.

423. A kifejezés értéke $n=0$ esetén 13, így az állítás igaz. Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás valamely n-re igaz! Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$3^{n+3}+4^{2n+3}$$

osztható 13-mal.

Mivel

$$3^{n+3}+4^{2n+3}=16\left(3^{n+2}+4^{2n+1}\right)-13\cdot 3^{n+2},$$

így az indukciós feltevés miatt készen vagyunk.

424. Mivel $2^5>5^2$, így az állítás $n=5$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás valamely n-re igaz! Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$2^{n+1}>(n+1)^2.$$

Az indukciós feltevés miatt

$$2^{n+1}>2n^2,$$

továbbá

$$n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

így elegendő igazolni:

$$n^2>2n+1, \text{ ebből } n(n-2)>1.$$

Ez igaz, hiszen $n\geq 5$, ezért ezzel a feladatot megoldottuk.

425. Mivel

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}<2\sqrt{2}-1, \text{ ebből } \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}<\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

ezért az állítás $n=2$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás valamely n-re igaz! Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-1.$$

Az indukciós feltevés miatt elegendő megmutatnunk, hogy

$$2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-1.$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Mivel

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{2}{2\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

ezért készen vagyunk.

426. Jelölje $s(n)$ a keletkező síkrészek maximális számát! Könnyű látni, hogy $s(1)=2$; $s(2)=4$; $s(3)=7$; tehát az állítás $n=1,2,3$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy az állítás valamely n-re igaz! Be kell látnunk, hogy $n+1$ egyenes esetén a síkrészek maximális száma:

$$s(n+1)=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}=\frac{n^2+n+2+2n+2}{2}=s(n)+n+1.$$

Képzeljük el, hogy az egyeneseket egymás után helyezzük el a síkon! Az $(n+1)$-edik egyenes elhelyezése után a korábbi egyenesek legfeljebb n metszéspontot alkotnak vele, így legfeljebb $n+1$ részre bontják. Ezek az egyenesdarabok az $(n+1)$-edik egyenes előtt keletkezett síkrészek közül azokat, melyeket felosztanak, két részre bontják, ezért legfeljebb $(n+1)$-gyel növelik a síkrészek számát. Azt kaptuk, hogy

$$s(n+1)=s(n)+n+1,$$

amit éppen igazolni szerettünk volna. A maximumra kapott érték elérhető, mivel mindig van olyan irány, amely a korábban elhelyezett egyenesek egyikével sem párhuzamos, továbbá a végesen sok metszéspont miatt az ezzel az iránnyal párhuzamos egyenes elhelyezhető úgy, hogy egyik korábban kapott metszéspontra sem illeszkedik.

427. A Viète-formulák miatt:

$$x_1+x_2=-a;\ \ x_1x_2=b.$$

Ebből látszik, hogy $n=1$-re az állítás igaz, $n=2$-re pedig

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

miatt igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás valamely n-ig igaz! Belátjuk, hogy akkor $(n+1)$-re is az.

$$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}=(x_1+x_2)(x_1^n+x_2^n)-x_1x_2(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})$$

figyelembevételével, és az indukciós feltevést felhasználva adódik az $(n+1)$-re vonatkozó állítás.

5.2. Indirekt módszer

428. Tegyük fel a bizonyítandóval ellentétben (indirekt módon), hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionális szám! Ekkor a négyzete is racionális, azaz

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$$

racionális.

Ebből az adódik, hogy $\sqrt{6}$ racionális, azaz $\frac{a}{b}$ alakú, ahol a és b pozitív egészek. Négyzetre emelést követően:

$$6 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ ebből } 6b^2 = a^2.$$

Ez azonban ellentmondás, mivel a bal oldalon szereplő szám prímhatványok szorzataként felírt alakjában a 2 biztos, hogy páratlan kitevőn szerepel, míg a jobb oldalon szereplő számban biztos, hogy páros kitevőn. Ellentmondásra jutottunk, ezért a bizonyítandó állítás valóban igaz.

429. Tegyük fel a bizonyítandóval ellentétben (indirekt módon), hogy lg 2 racionális szám! Ez azt jelenti, hogy felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b pozitív egészek. A logaritmus definíciója szerint akkor

$$10^{\frac{a}{b}} = 2, \text{ ebből } 10^a = 2^b.$$

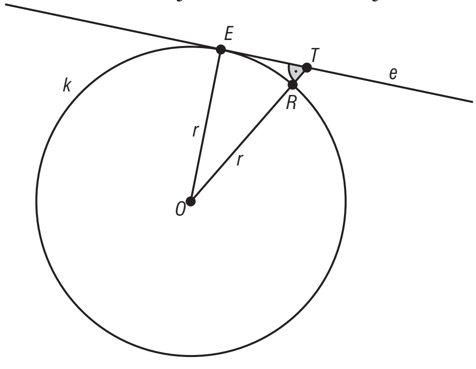
Ez azonban ellentmondás, mivel a bal oldalon álló szám osztható 5-tel, míg a jobb oldalon szereplő nem. Ellentmondásra jutottunk, ezért a bizonyítandó állítás valóban igaz.

430. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\cos 15°$ racionális! Tudjuk, hogy $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; másrészt a kétszeres szögekre vonatkozó azonosság miatt:

$$\cos 30° = 2\cos^2 15° - 1;$$

ezért $\cos 30°$ is racionális. Viszont könnyen igazolható, hogy a $\sqrt{3}$ irracionális szám, emiatt $\cos 30°$ is irracionális lesz. Ellentmondásra jutottunk, ami a feladatban szereplő állítást bizonyítja.

431. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, tehát azt, hogy az érintési pontba húzott sugár nem merőleges az érintőre! Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Jelölje T a kör O középpontjából az e egyenesre bocsátott merőleges talppontját, E pedig az érintési pontot! Feltevésünk szerint $OTE\sphericalangle = 90°$. Ha r a kör sugara, akkor egyrészt $OE = r$, másrészt $OT = TR + r > OE$, ami ellentmondásra vezet, hiszen az OTE derékszögű háromszögben OE az átfogó. Ellentmondásra jutottunk, ami a feladatban szereplő állítást bizonyítja.

432. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis, hogy van olyan konvex sokszög, melynek van 36 darab 170°-nál kisebb szöge. Ha n a sokszög oldalainak száma, akkor ismeretes, hogy $(n - 2) \cdot 180°$ a belső szögek összege, és a fentiek miatt teljesülnie kell:

$$180°(n-2) < 170° \cdot 36 + 180°(n-36);$$

ahonnan

$$6120° = 180° \cdot 34 < 170° \cdot 36 = 6120°.$$

Ellentmondásra jutottunk, ami a feladatban szereplő állítást bizonyítja.

433. Jelöljük a háromszög szögeit α-val β-val és γ-val! Feltehető, hogy $0 < \alpha \le \beta \le \gamma < 90°$. Ekkor az arányok között van olyan, amely legalább 1. Állítjuk, hogy $\frac{\gamma}{\alpha}$ és $\frac{\beta}{\alpha}$ közül valamelyik legfeljebb $\frac{5}{3}$. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz, hogy mindkét arány nagyobb $\frac{5}{3}$-nál! Ekkor

$$3\gamma > 5\beta;\ \text{illetve}\ 3\beta > 5\alpha = 5\left(180° - \beta - \gamma\right).$$

Ezekből

$$900° < 8\beta + 5\gamma < \frac{24}{5}\gamma + 5\gamma = \frac{49}{5}\gamma;$$

ahonnan

$$90° < \frac{4500°}{49} < \gamma.$$

Ellentmondásra jutottunk, ami a feladatban szereplő állítást bizonyítja.

434. Az állítás megfordítása: „Ha egy háromszög három oldalára igaz, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű.” Az állítás megfordítása igaz.

435. Az állítás megfordítása: „Ha két háromszög szögei páronként egyenlők, akkor oldalaik is páronként egyenlők.”
Az állítás megfordítása nem igaz, ugyanis ha két háromszög szögei páronként egyenlők, akkor a két háromszög hasonló, de az oldalaik páronként nem feltétlenül egyenlők (csak az arányaik).

436. Az állítás megfordítása: „Ha a és b pozitív egészek legkisebb közös többszöröse $a \cdot b$, akkor a és b relatív prímek.”
Az állítás megfordításának igazolása indirekt módszerrel történik. Tegyük fel, hogy a és b nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb pozitív közös osztójuk, amit jelöljön d! Ismert, hogy a legkisebb közös többszörös és a legnagyobb közös osztó szorzata $a \cdot b$, azaz ekkor a legkisebb közös többszörösre fennáll, hogy $[a, b] = \frac{ab}{d} < ab$. Az ellentmondás igazolja az állításunkat.

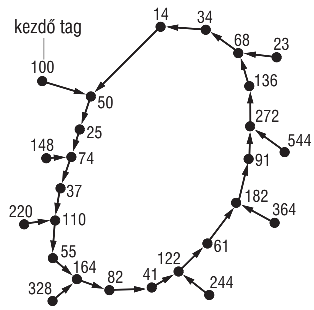
437. Az állítás megfordítása: „Ha p és q legkisebb közös többszöröse $p \cdot q$, akkor p és q páratlan pozitív prímek.” Az állítás megfordítása nem igaz, pl. $p = 6$ és $q = 35$.

438. a) Egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeire teljesül, hogy összegük 180°.
b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha osztható 3-mal és 8-cal.
c) Két háromszög pontosan akkor hasonló, ha megfelelő oldalaik arányai egyenlők.

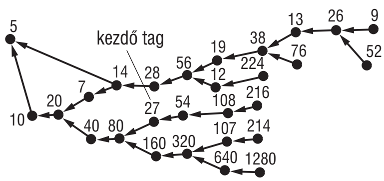
6. Sorozatok – megoldások

6.1. Sorozatok tagjai, tagok összege

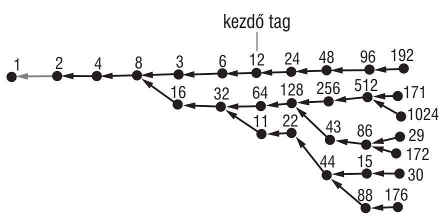
439. a) A sorozat első néhány tagja:
100, *50*, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, *50*, …
Az 50-nel kezdődik egy új 18 tagú ciklus. A sorozat első tagja 100, marad 2017 tag, ebben 112 db 18-as ciklus van, azaz a ciklus vége épp a 2017-edik tagnál ér véget, tehát a 2018. tag az új ciklus első eleme. $2018 = 1 + 112 \cdot 18 + 1$, így a 2018. tag a 113. ciklus első tagja, az 50.



b) A sorozat első néhány tagja:
27, 80, 40, *20*, 10, 5, 14, 7, *20*, …
A 20-szal elkezdődik egy új 5 tagú ciklus. $2018 = 3 + 403 \cdot 5$, így az első 2018 tag összege: $27 + 80 + 40 + 403 \cdot (20 + 10 + 5 + 14 + 7) = 22\,715$.



c) A sorozat első néhány tagja:
12, 6, 3, 8, 4, *2*, 1, *2*, …
Több 3-mal osztható tagja nincs a sorozatnak, így az első 2018 tagjának szorzata a 3 harmadik hatványával osztható.



440. A számtani sorozat n. tagja $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, azaz a feladat alapján:

$$\begin{cases} a_{2005} = a_1 + 2004\cdot d = -1, \\ a_{2009} = a_1 + 2008\cdot d = -11. \end{cases}$$

A 2. egyenletet az elsőből kivonva ezt kapjuk:

$$-4d = 10, \text{ ebből } d = -2{,}5.$$

A kérdéses tag pedig: $a_{2011} = a_{2009} + 2d = -11 - 5 = -16.$

441. A 6. és a 3. tag különbsége a számtani sorozat differenciájának háromszorosa, azaz $d = 4$. A 100. és a 10. tag különbsége a differencia 90-szerese, azaz 360.

442. A számtani sorozat első n tagjának összege:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n,$$

így a feladat alapján:

$$\begin{cases} S_{15} = \dfrac{2a_1 + 14d}{2}\cdot 15 = 255, \\ S_{20} = \dfrac{2a_1 + 19d}{2}\cdot 20 = 400. \end{cases}$$

Rendezés után: $\begin{cases} a_1 + 7d = 17 \\ a_1 + 9{,}5d = 20 \end{cases}$, ebből $2{,}5d = 3$, amiből $d = 1{,}2.$

Ebből az első tag és a kérdéses 10. tag:

$$a_1 = 17 - 8{,}4 = 8{,}6, \text{ amiből } a_{11} = 8{,}6 + 10\cdot 1{,}2 = 20{,}6.$$

443. A sorozat második és hatodik tagját kifejezhetjük a negyedik tag és a különbség segítségével:

$$a_2 = a_4 - 2d;\quad a_6 = a_4 + 2d.$$

Így

$$15 = a_2 + a_6 = 2\cdot a_4;$$

amiből a sorozat negyedik tagja: $a_4 = 7{,}5;$ azaz nem lehet a sorozat minden tagja egész.

444. Gyuri magassága az n. születésnapján $a_n = 48 + n\cdot d$; ahol d az évenkénti növekedése.

Így Zoli magassága az n. születésnapján $b_n = 53 + n\cdot 2d$. A 18. születésnapjukon:

$$a_{18} + b_{18} = 101 + 54d = 335, \text{ ebből } d = \frac{234}{54} = \frac{13}{3} = 4{,}33 \text{ cm}.$$

Azaz Gyuri 9 éves korában éppen $a_n = 48 + 9 \cdot \frac{13}{3} = 87$ cm magas volt.

445. A színházba a tanárokkal együtt tehát 186-an mennek. A sorokban lévő székek száma egy olyan számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 10, differenciája 1. Jelölje *n* a lefoglalandó sorok számát! A számtani sorozat első *n* tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 1) \geq 186.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve a következő másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk:

$$n^2 + 19n - 372 \geq 0.$$

A megoldás: $n_1 \geq 12$ és $n_2 \leq -31$. Csak az első esetet kell számításba vennünk, azaz az első 12 sort kell lefoglalni, az éppen elég lesz.

446. Az *n*. félórában megtett utat jelölje az egyik barát esetében a_n, míg a másik barát esetén b_n.

Mindkét sorozat egy csökkenő számtani sorozat:

$$a_n = 2000 - 200 \cdot (n-1), \quad b_n = 2000 - 300 \cdot (n-1).$$

Keressük azt a legkisebb *n* értéket, amelyre az általuk az első *n* félórában megtett út összesen legalább 15 000 méter, azaz $S_n + S'_n \geq 15000$. Azaz:

$$S_n + S'_n = \frac{n \cdot (2 \cdot 2000 - 200 \cdot (n-1))}{2} + \frac{n \cdot (2 \cdot 2000 - 300 \cdot (n-1))}{2} =$$

$$= \frac{n \cdot (8000 - 500 \cdot (n-1))}{2} \geq 15000.$$

Rendezés után a másodfokú egyenlőtlenség:

$$-n^2 + 17n - 60 \geq 0, \text{ ebből } 5 \leq n \leq 12;$$

azaz a legkisebb megfelelő érték az 5, ami azt jelenti, hogy összesen 5 félórát, azaz 2,5 órát gyalogoltak, tehát 10 óra 30 perckor találkoztak.

447. Egy mérkőzésen 2 pontot osztunk szét, így a bajnokság során összesen $\frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 2 = 110$ pontot osztunk szét a csapatok közt, ennyi a végeredményben szereplő pontszámok összege. Jelölje a_1 az első helyezett pontszámát, így a 2. helyezett pontszáma $a_1 - d$, és így tovább. A 11. helyezett pontszáma pedig $a_1 - 10 \cdot d$. Ezen pontszámok összege:

$$\frac{2a_1 - 10 \cdot d}{2} \cdot 11 = 110.$$

Azaz $a_1 - 5 \cdot d = 10$; ami éppen a hatodik helyezett csapat pontszáma.

448. Jelölje a hosszabbik befogó hosszát x! Így a rövidebb befogó hossza $x-d$, míg az átfogó hossza $x+d$. Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$(x-d)^2+x^2=(x+d)^2,$$

amiből rendezés után kapjuk:

$$x^2=4xd;$$

és mivel $x \uparrow 0$; ezért

$$x=4d \text{ adódik.}$$

Azaz a háromszög oldalhosszúságai: $3d$, $4d$, $5d$. Így a legkisebb szögre:

$$\sin\alpha=\frac{3d}{5d}=\frac{3}{5}, \text{ ebből } \alpha=36{,}87°.$$

449. $1+2+3-4+5+6+7-8+...+2005+2006+2007-2008=$

$$=1+2+3+4+\ldots+2007+2008-2\cdot(4+8+12+...+2004+2008)=$$

$$=\frac{1+2008}{2}\cdot 2008-2\cdot\frac{4+2008}{2}\cdot 502=1007\,012.$$

450. A jól ismert összegzési formulák segítségével felírható:

$$S_1=\frac{k\cdot(2a_1+(k-1)\cdot d)}{2},$$

$$S_2=\frac{m\cdot(2a_1+(m-1)\cdot d)}{2},$$

$$S_3=\frac{n\cdot(2a_1+(n-1)\cdot d)}{2},$$

(a_1 jelöli a sorozat első tagját, d pedig a differenciát).
A feladatban szereplő kifejezésbe beírva:

$$\frac{S_1}{k}\cdot(m-n)+\frac{S_2}{m}\cdot(n-k)+\frac{S_3}{n}\cdot(k-m)=$$

$$=\frac{(2a_1+(k-1)\cdot d)}{2}\cdot(m-n)+\frac{(2a_1+(m-1)\cdot d)}{2}\cdot(n-k)+\frac{(2a_1+(n-1)\cdot d)}{2}\cdot(k-m)=$$

$$=a_1\cdot((m-n)+(n-k)+(k-m))+\frac{d}{2}\cdot((k-1)\cdot(m-n)+(m-1)\cdot(n-k)+(n-1)\cdot(k-m))=$$

$$=a_1\cdot 0+\frac{d}{2}\cdot(k\cdot m-k\cdot n-m+n+m\cdot n-m\cdot k-n+k+n\cdot k-n\cdot m-k+m)=0+\frac{d}{2}\cdot 0=0.$$

Azaz a kifejezés értéke azonosan 0.

451. Az n. tag az alábbi összefüggés alapján számolható:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}.$$

Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 11664, \\ a_8 = a_1 \cdot q^7 = 1536. \end{cases}$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva (az osztás elvégezhető, mivel a sorozat első tagja nem lehet 0, ugyanis akkor az összes tag 0 lenne) kapjuk:

$$q^5 = \frac{243}{32}, \text{ ebből } q = \frac{3}{2}.$$

452. Az n. tag az alábbi összefüggés alapján számolható:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^3 = 5; \\ a_{14} = a_1 \cdot q^{13} = 5120. \end{cases}$$

A második egyenletet az elsővel elosztva (az osztás elvégezhető, mivel a sorozat egyetlen tagja sem lehet 0, ugyanis akkor az összes tag 0 lenne) kapjuk:

$$q^{10} = 1024, \text{ ebből } q = 2 \text{ vagy } q = -2.$$

A sorozat hatodik tagja mindkét esetben ugyanaz, ugyanis:

$$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 5 \cdot 2^2 = 20, \text{ ha } q = 2;$$

míg a másik esetben:

$$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 5 \cdot (-2)^2 = 20, \text{ ha } q = -2.$$

453. A zsinór felfüggesztésétől számított minden egész órában megmérve a zsinór hosszát egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, n óra múlva a hossz:

$$l_n = 0,6 \cdot 1,5^n.$$

A kérdés tehát, hogy melyik az a legkisebb egész n, amire:

$$l_n = 0,6 \cdot 1,5^n \geq 2.$$

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$n \geq \frac{\lg 3,\dot{3}}{\lg 1,5} \approx 2,97;$$

azaz a legkisebb egész megoldás a 3. Azaz 3 óra múlva következik be a kívánt megnyúlás.

454. Egy (nemkonstans) mértani sorozat első n tagjának összege, ha $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Azaz jelen esetben:

$$S_4 = a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 0;$$

azaz vagy az első tag 0, vagy $q^4 - 1 = 0$.

Az első eset nem fordulhat elő, mert akkor minden tagja a sorozatnak 0 lenne.
A második eset kétféleképpen lehetséges: $q = 1$ vagy $q = -1$ esetben, melyek közül az első nem fordulhat elő (konstans sorozat esetén az első négy tag összege csak akkor lehetne 0, ha minden tag 0 lenne, ami nem lehetséges, ugyanis a harmadik tag 7). Így a sorozat hányadosa –1, azaz a sorozat tagjai váltakozva 7 és –7, a páros indexű tagok értéke –7, a páratlan indexű tagoké pedig 7.

Így a 2008. tag –7.

455. A termelés *n* hónap elteltével:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot 1{,}02^{n-1};$$

ahol a_1 a kezdeti termelés mértéke. Azaz 2 év (24 hónap) elteltével:

$$a_1 \cdot 1{,}02^{23} = a_1 \cdot 1{,}577.$$

Azaz 2 év után a termelés a kezdeti termelés 1,577-szerese.

456. A feladat szövege alapján:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{19}{3} \text{ és } a_4 + a_5 + a_6 = q^3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{152}{81}.$$

Ezek alapján:

$$q^3 = \frac{\frac{152}{81}}{\frac{19}{3}} = \frac{8}{27}, \text{ ebből } q = \frac{2}{3};$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{19}{3},$$

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = \frac{19}{3},$$

$$a_1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{19}{3}, \text{ azaz } a_1 = 3.$$

457. Az ötödik elem és a hányados segítségével kifejezhetjük a sorozat bármely elemét:

$$a_1 \cdot a_9 = \frac{a_5}{q^4} \cdot \left(a_5 \cdot q^4\right) = a_5^2 = 2304, \text{ ebből } a_5 = 48 \text{ vagy } a_5 = -48.$$

A megoldások közül csak az első megfelelő, mivel a sorozat a feladat szövege szerint pozitív tagú. A másik összefüggés:

$$a_4 + a_6 = a_5 \cdot \left(\frac{1}{q} + q\right) = 120;$$

ahova $a_5 = 48$-at helyettesítve kapjuk:

$$\left(\frac{1}{q} + q\right) = 2,5, \text{ ebből } q = 2 \text{ vagy } q = 0,5.$$

Azaz a feltételeknek két sorozat felel meg, az egyik: $a_1 = \frac{48}{2^4} = 3$ és $q = 2$;

a másik pedig: $a_1 = \frac{48}{0,5^4} = 768$ és $q = 0,5$.

458. $a_{k-1} \cdot a_k \cdot a_{k+1} = \frac{a_k}{q} \cdot a_k \cdot a_k q = a_k^3 = 13824$, ebből $a_k = 24$. Továbbá:

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1} = \frac{a_k}{q} + a_k + a_k q = a_k \cdot \left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 126,$$

$$\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = \frac{126}{24},$$

$$q + \frac{1}{q} = 4,25,$$

$$q = 4,$$

vagy $q = \frac{1}{4}$.

459. A gépsor aktuális értéke n év elteltével: $17\,000\,000 \cdot (1 - 0,12)^n$. Azaz a megoldandó egyenlőtlenség:

$$17\,000\,000 \cdot (1 - 0,12)^n \le 8\,000\,000.$$

Ami rendezés után:

$$0,88^n \le \frac{8}{17}, \text{ ebből } n \ge \frac{\lg \frac{8}{17}}{\lg 0,88} \approx 5,897,$$

azaz 6 év alatt kerül a gépsor értéke 8 millió forint alá.

460. Az induló populáció egyedszáma 1 év elteltével $20 \cdot 1,1^3$, mivel háromszor szaporodtak. Az egyedszám n év múlva: $20 \cdot 1,1^{3n}$. A megoldandó egyenlet tehát:

$$20 \cdot 1,1^{3n} = 1100;$$

a megoldás pedig: $n = \frac{\lg 55}{3 \cdot \lg 1,1} \approx 14$.

Azaz kb. 14 évvel ezelőtt voltak 20-an a rágcsálók.
(a rágcsálók várható élettartamát kihasználtuk, ugyanis feltételeztük, hogy még nem hullott el jelentős számú egyed a populációból.)

461. A berendezés értéke 1 év múlva, miután ráköltötték az 5000 eurót is:

$$110\,000 \cdot 0,77 + 5000.$$

A berendezés értéke 2 év múlva:

$$(110\,000 \cdot 0,77 + 5000) \cdot 0,77 + 5000 = 110\,000 \cdot 0,77^2 + 5000 \cdot (1 + 0,77).$$

A berendezés értéke 3 év múlva:

$$(110\,000 \cdot 0,77^2 + 5000 \cdot (1 + 0,77)) \cdot 0,77 + 5000 =$$
$$= 110\,000 \cdot 0,77^3 + 5000 \cdot (1 + 0,77 + 0,77^2).$$

A berendezés értéke n év elteltével:

$$110\,000 \cdot 0,77^n + 5000 \cdot (1 + 0,77 + \ldots + 0,77^{n-1}) = 110\,000 \cdot 0,77^n + 5000 \cdot \frac{1 - 0,77^n}{1 - 0,77}.$$

Azaz a megoldandó egyenlőtlenség:

$$110\,000 \cdot 0,77^n + 5000 \cdot \frac{1 - 0,77^n}{1 - 0,77} \le 110\,000 \cdot 0,5.$$

Ami rendezés után:

$$0,77^n \le 0,3768, \text{ ebből } n \ge \frac{\lg 0,3768}{\lg 0,77} \approx 3,73$$

Azaz 4 év elteltével süllyed a berendezés értéke a kérdezett szint alá.

462. K értékű kölcsön esetén a havi törlesztő részlet x (a többi feltétel azonos a feladatban szereplőkkel):

$$0 = K \cdot 1,1^{14} - 12x \cdot (1,1^{13} + 1,1^{12} + \ldots + 1);$$

amiből $x = \dfrac{3\,000\,000 \cdot 1,1^{14}}{12 \cdot \dfrac{1,1^{14} - 1}{1,1 - 1}} = 33936,6$ forint a havi részlet értéke.

463. A háromszög oldalai növekvő sorrendben: $\dfrac{b}{q}$; b; bq. A Pitagorasz-tételt felírva:

$$\left(\frac{b}{q}\right)^2 + b^2 = (bq)^2, \text{ ebből } b^2 \cdot \left(\frac{1}{q^2} + 1 - q^2\right) = 0.$$

Mivel $b \ne 0$, ezért

$$\left(\frac{1}{q^2} + 1 - q^2\right) = 0, \text{ ebből } q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

melyek közül valós megoldást csak $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esetben kapunk, a két valós megoldás közül geometriai jelentéssel csak a pozitív érték rendelkezik: $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

A legkisebb szögre: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$, ebből $\alpha = 38{,}17°$.

464. Jelöljük a kiindulási három elem közül a középsőt a-val, a hányadost q-val ($q \neq 0$)! Így a feladat alapján

$$\frac{a}{q}+1,\ a+14,\ aq+2$$

egy számtani sorozat három egymást követő tagja, azaz:

$$\frac{a}{q}+1+aq+2 = 2\cdot(a+14).$$

A három egymást követő elem összege egy számtani sorozat esetén a középső elem háromszorosa, azaz

$$a+14 = 50, \text{ ebből } a = 36$$

Ezt beírva az előző egyenletbe:

$$\frac{36}{q}+1+36q+2 = 100, \text{ ebből } q_1 = \frac{4}{9} \text{ és } q_2 = \frac{9}{4}.$$

Az első esetben a mértani sorozat három tagja 81; 36; 16; a második esetben 16; 36; 81. A megfelelő számtani sorozatok tagjai pedig 82; 50; 18, illetve 17; 50; 83. Az első esetben a differencia –32, a második esetben 33.

465. A kiindulási tagok $a-d$; a; $a+d$. Ezeket növelve a megfelelő értékekkel: $a-d+6$; $a+7$; $a+d+12$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai, szorzatuk nyilván a középső elem köbe, azaz:

$$(a+7)^3 = 13824, \text{ ebből } a = 17.$$

A mértani sorozat definíciója szerint:

$$(a-d+6)\cdot(a+d+12) = 24^2, \text{ ebből } (23-d)\cdot(29+d) = 576;$$

amiből $d_1 = -13$ és $d_2 = 7$.

A megfelelő kiindulási hármasok: 30; 17; 4 és 10; 17; 24, a módosítás után pedig: 36; 24; 16, illetve 16; 24; 36. Azaz a megfelelő hányadosok: $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{2}$.

466. A sorozat hányadosa nem lehet negatív, ugyanis alternáló sorozat (azaz olyan sorozat, ahol minden második tag pozitív, a többi negatív előjelű) nem lehet számtani sorozat. Ha a hányados 1-től különböző, akkor (a konstans 0 sorozat kizárva) az egymást követő tagok különbsége nem lehet állandó, ugyanis:

$$a_{n+1}-a_n = q\cdot(a_n-a_{n-1}) \neq (a_n-a_{n-1});\ \text{ ha } q \neq 1$$

azaz a sorozat nemkonstans sorozat. Tehát a sorozat csak akkor lehet egyben számtani és mértani sorozat is, ha konstans.

467. Nincs megfelelő sorozat, a bizonyítást indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy létezik megfelelő sorozat: $a_k = 1$; $a_l = \sqrt{3}$; $a_m = 2$. Az általános tagra vonatkozó összefüggés szerint:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d = 1; \quad a_l = a_1 + (l-1) \cdot d = \sqrt{3}; \quad a_m = a_1 + (m-1) \cdot d = 2.$$

A harmadik egyenletből kivonva az első egyenletet:

$$(m-k) \cdot d = 2 - 1 = 1, \text{ ebből } d = \frac{1}{m-k};$$

azaz a differencia racionális szám. Ha egy számtani sorozat valamely tagja racionális, és a differencia racionális, akkor a sorozat minden tagja racionális. A $\sqrt{3}$ azonban irracionális. Az ellentmondás igazolja állításunk helyességét.

468. $a_3 = 2 \cdot a_2 - a_1 = 5$; $a_4 = 2 \cdot a_3 - a_2 = 6$; $a_5 = 2 \cdot a_4 - a_3 = 7$; $a_6 = 2 \cdot a_5 - a_4 = 8$.

469. Bebizonyítjuk, hogy az egymást követő tagok különbsége minden esetben 1. $a_{n+1} - a_n = (2 \cdot a_n - a_{n-1}) - a_n = a_n - a_{n-1}$, ha $n \geq 3$. A sorozat első három tagja esetén ugyanez ellenőrizhető, és adódik, hogy ez a konstans 1.

470. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A sorozat minden tagja egész. Az első három tag osztható 3-mal. Tegyük fel, hogy az első n tag osztható 3-mal! Bebizonyítjuk, hogy az $(n+1)$ tag is osztható 3-mal:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} = 3 \cdot (3 \cdot k) - (3 \cdot l) + 2 \cdot (3 \cdot m) = 3 \cdot (3k - l + 2m); \ k \in \mathbb{Z}, \ l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}.$$

Felhasználtuk az indukciós feltevést. Az utolsó kifejezésben a zárójelben lévő szám egész, azaz az $(n+1)$ tag is osztható 3-mal.

6.2. Fibonacci-sorozatos problémák

471. Az első fokra egyetlen módon juthatunk fel. A 2. lépcsőfokra 2 különböző módon juthatunk fel (vagy két kis lépésben, vagy egy nagy lépéssel). A 3. fokra juthatunk az 1. fokról egy nagy lépéssel, vagy a 2. fokról egy kis lépéssel, azaz a 3. fokra való különböző feljutási lehetőségek száma éppen az 1. és a 2. fokra való különböző feljutási lehetőségek számának az összege. Hasonlóképpen a 4. fokra való feljutások száma ismét a 2. és a 3. fokra való különböző feljutási lehetőségek számának az összege. Láthatjuk, ha a_n jelöli az n. lépcsőfokra való különböző feljutási lehetőségek számát, akkor $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = a_1 + a_2 = 3$; $a_4 = a_2 + a_3 = 5$ … $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Azaz a sorozat tagjai a Fibonacci-sorozat tagjai $(a_n = f_{n+1})$. Azaz a 10. lépcsőfokra $a_{10} = f_{11} = 89$ különböző módon juthatunk fel.

472. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetén az állítás igaz $(1 = 2 - 1)$.
Tegyük fel, hogy az azonosság valamely n értékre fennáll (indukciós feltevés)! Ezt felhasználva bebizonyítjuk, hogy az azonosság $(n+1)$-re is fennáll:

$$f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} + f_{n+1} - 1 = f_{n+3} - 1 = f_{(n+1)+2} - 1;$$

ahol az indukciós feltevésen kívül a sorozat képzési szabályát használtuk fel.

473. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetén az állítás igaz $(1 = 2 - 1)$.
Tegyük fel, hogy az azonosság valamely n értékre fennáll (indukciós feltevés)! Ezt felhasználva bebizonyítjuk, hogy az azonosság $(n+1)$-re is fennáll:
$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} + f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 = f_{2n+3} - 1 = f_{2(n+1)+1} - 1$, ahol az indukciós feltevésen kívül a sorozat képzési szabályát használtuk fel.

474. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. $n = 2$ esetén az egyenlőség fennáll: $1 \cdot 2 - 1^2 = (-1)^2$. Tegyük fel, hogy az azonosság valamely n értékre fennáll (indukciós feltevés)! Bebizonyítjuk, hogy az azonosság $(n+1)$-re is fennáll (a számítások során többször felhasználjuk a képzési szabályt, $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$; illetve más alakban is: $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$).

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n,$$

$$(f_{n+1} - f_n) \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n,$$

$$f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Szorozzuk –1-gyel az egyenlet mindkét oldalát!

$$f_n \cdot f_{n+1} + f_n^2 - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1},$$

$$f_n \cdot (f_{n+1} + f_n) - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1},$$

$$f_n \cdot f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó azonosság.

6.3. Sorozatok tulajdonságai

475. A feltételeknek megfelel például az $a_n = (-1)^n$ sorozat.

476. A sorozat nem monoton, ugyanis minden páros indexű tag 2-nél nagyobb, míg minden páratlan indexű tag 2-nél kisebb.

477. A sorozat szigorúan monoton növekvő, ugyanis:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\cdot(n+1)-1}{(n+1)+3} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)\cdot(n+3)-(2n-1)\cdot(n+4)}{(n+3)\cdot(n+4)} =$$

$$= \frac{7}{(n+3)\cdot(n+4)} > 0$$

minden pozitív egész n esetén, azaz $a_{n+1} > a_n$ minden pozitív egész n esetén.

478. A sorozat szigorúan monoton csökkenő, ugyanis:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+2}} < 0$$

minden pozitív egész n esetén, azaz $a_{n+1} < a_n$ minden pozitív egész n esetén.

479. A sorozat korlátos, ugyanis $1 \le 2 + \cos\frac{n\pi}{3} \le 3$; azaz $0 < \frac{1}{n^2} \le a_n \le \frac{3}{n^2} \le 3$; ahol $n \in \mathbb{Z}^+$.

480. A sorozat felülről korlátos, ugyanis:

$$\frac{3^{n+1}+7}{5^n} = \frac{3\cdot 3^n + 7}{5^n} < \frac{3\cdot 3^n + 3\cdot 3^n}{5^n} = 6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n < 6.$$

A sorozat alulról is korlátos, ugyanis a tört számlálója és nevezője egyaránt pozitív, azaz a sorozat minden tagja pozitív, így a 0 egy megfelelő alsó korlátja a sorozatnak. A sorozat alulról és felülről is korlátos, ezért korlátos.

481. A sorozat felülről nem korlátos, ugyanis:

$$a_n = \frac{4^n}{n} > \frac{4^n}{2^n} = 2^n \quad \text{és} \quad 2^n$$

tetszőlegesen nagy értéket felvehet. A sorozatunkra is ugyanez igaz, tehát felülről nem korlátos, ezért nem korlátos.

482. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}}=\dfrac{0}{5+0}=0.$

483. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-1}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{8-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\dfrac{8-0}{2+0}=4.$

484. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+2}-7}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25\cdot 5^n-7}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25-\frac{7}{5^n}}{1}=25.$

485. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n-1}{n^3+7n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\dfrac{0+0-0}{1+0+0}=0.$

486. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-4n+7}{n^4+5n-100}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{n^3}+\frac{7}{n^4}}{1+\frac{5}{n^3}-\frac{100}{n^4}}=\dfrac{1-0+0}{1+0-0}=1.$

487. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+n^2-n}{3n^3-12n+2008}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{12}{n^2}+\frac{2008}{n^3}}=\dfrac{-2-0+0}{3+0-0}=-\dfrac{2}{3}.$

488. Bővítés után:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-2}\right)}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}=0.$$

489. Mivel

$$a_n>\frac{2n^2}{50n+12}\ge\frac{2n^2}{62n}=\frac{n}{31},$$

így a sorozatnak nincs határértéke, hiszen $\dfrac{n}{31}$ tetszőlegesen nagy lehet.

490. A számtani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2,$$

$$1+2+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}.$$

Innen

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1+0}=2.$$

491. Bővítés után „teleszkopikus” az összeg:

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n}-1).$$

Azaz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=2.$

492. $a_n=\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

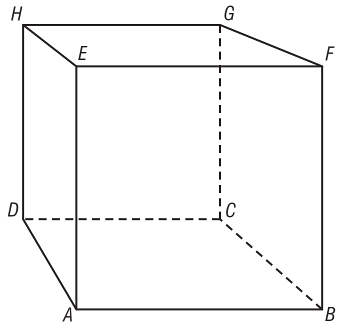
Azaz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}.$

493. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2(n+1)^2}{4n^2(n+1)(2n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}=\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{4}.$

7. Térgeometria – megoldások

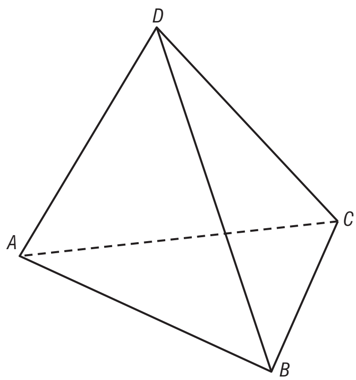
7.1. Térelemek, testek

494. Tekintsük az alábbi ábrát!



a) Például: *AB* és *AE*; *AD* és *AE*; *AB* és *AD*.
b) Például: *AB* és *EF*; *AB* és *CD*; *AB* és *HG*.
c) Például: *AB* és *HD*; *AB* és *CG*; *AE* és *CD*.

495. Tekintsük az alábbi ábrát!



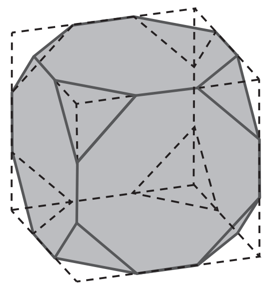
A tetraéder bármelyik élének négy másikkal van és eggyel nincs közös pontja, ez utóbbival alkot kitérő élegyenespárt. Mivel a tetraédernek összesen hat éle van, így három megfelelő egyenespár lesz: *AD* és *BC*; *AB* és *CD*; *AC* és *BD*.

496. Tekintsük az 1 méter élű szabályos tetraédert! Ennek négy csúcsa van, így a skatulyaelv miatt biztosan lesz két olyan közöttük, melyek azonos színűek.

497. a) A kapott testnek a kocka minden lapján van egy-egy lapja, továbbá a vágások után a kocka mindegyik csúcsánál keletkezik egy lap, ezért a lapjainak száma: $6+8=14$.

b) A testnek a kocka mindegyik élére illeszkedik egy éle, továbbá a vágások után a kocka mindegyik csúcsánál három él keletkezik, ezért az élek száma: $12+8\cdot 3=36$.

c) A testnek a kocka minden élén két-két csúcsa fekszik, ezért csúcsainak száma: $12\cdot 2=24$.



498. A konvex poliéder élei pontosan két laphoz tartoznak, ezért, ha összeadjuk a határoló sokszöglapok oldalainak számát, akkor az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden élt kétszer számolunk meg. Ez alapján az élek számának kétszeresére:

$$3\cdot 3+5\cdot 5+7\cdot 7=95,$$

ami ellentmondás, így nem létezik a feladat feltételeinek megfelelő konvex poliéder.

499. a) A konvex poliéder élei pontosan két laphoz tartoznak, ezért ha összeadjuk a határoló sokszöglapok oldalainak számát, akkor az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden élt kétszer számolunk meg. Ez alapján az élek számának kétszeresére:

$$6\cdot 8+8\cdot 6+12\cdot 4=144,$$

így 72 éle van a testnek.

b) Mivel minden csúcsból 3 él indul ki, ezért minden csúcsot háromszor számolunk meg, amikor összeadjuk a határoló lapok csúcsainak számát, ami 144, ezért a test csúcsainak száma 48.

500. Jelölje x a fehér darabok számát! Mindegyik fekete bőrdarabnak öt fehér szomszédja van, így a fehér szomszédok száma összesen:

$$5\cdot(32-x).$$

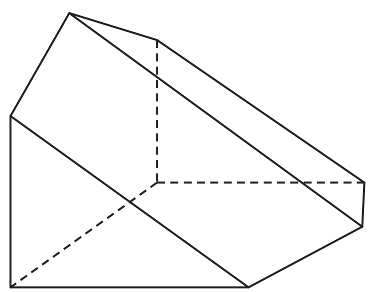
Minden fehér darab három feketével szomszédos egyszerre, így mindegyiket háromszor számoltuk meg, ezért

$$x = \frac{5 \cdot (32 - x)}{3},$$

ahonnan $x = 20$. Tehát a labda 20 fehér és 12 fekete bőrdarabból van összevarrva.

501. Tekintsünk egy olyan négyzet alapú szabályos gúlát, melynek oldalélei ugyanolyan hosszúak, mint alapélei!
Ez a test megfelel a feltételeknek, hiszen az oldallapok szabályos háromszögek lesznek.

502. Létezik, például az ábrán látható test, melynek 2 háromszög, 2 négyszög és 2 ötszög oldallapja van.



503. Legyenek a téglatest élei: a, b, c, melyek cm-ben mérve egész számok! Feltehetjük, hogy $a \le b \le c$. Ekkor $a \cdot b \cdot c = 24$.
A lehetséges felbontások:

a	b	c
1	1	24
1	2	12
1	3	8
1	4	6
2	2	6
2	3	4

Ezért hat különböző téglatest készíthető.

504. Igen. Először bontsuk fel a kockát gondolatban 27 darab egybevágó kis kockára, tehát alakítsunk ki egy $3 \cdot 3 \cdot 3$-as kockát! Az egyik csúcsnál keletkező $2 \cdot 2 \cdot 2$-es kockát alkotó 8 darab kis kockát ragasszuk össze! Így a nagy kockát felosztottuk 19 darab $1 \cdot 1 \cdot 1$-es és egy $2 \cdot 2 \cdot 2$-es kockára.

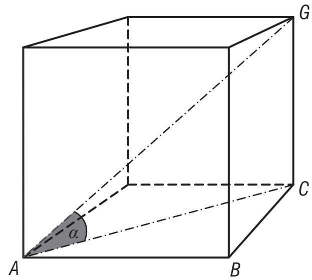
505. a) Azoknak a kis kockáknak a száma, melyeknek nincs közös pontja a nagy kocka oldallapjaival: $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

b) Azoknak a kis kockáknak lesz pontosan egy festett lapja, melyeknek van közös lapja a nagy kocka oldallapjaival úgy, hogy azok a 10 · 10-es határoló lapokon belüli $8 \cdot 8$-as négyzeteket alkotják. Ezek száma: $6 \cdot 64 = 384$.

c) Azoknak a kis kockáknak lesz pontosan két festett lapja, melyeknek egy éle a nagy kocka valamely élén található, de nincs közös csúcsuk a nagy kockával. A nagy kocka minden éléhez 8 darab ilyen kis kocka tartozik, ezért számuk: $12 \cdot 8 = 96$.

7.2. Térelemek hajlásszöge, távolsága

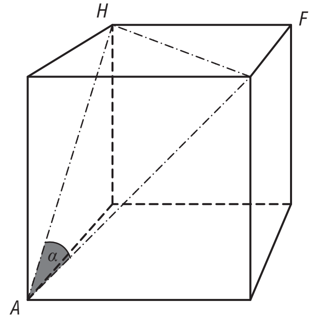
506. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit, és legyen $GAC\sphericalangle = \alpha$!



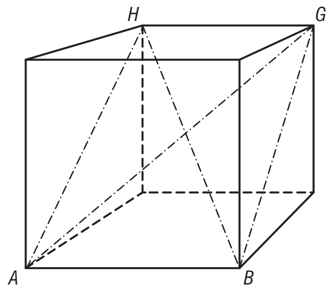
Tegyük fel, hogy a kocka élhosszúsága a! Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $AC = a\sqrt{2}$, ezért az ACG derékszögű háromszögből:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°.$$

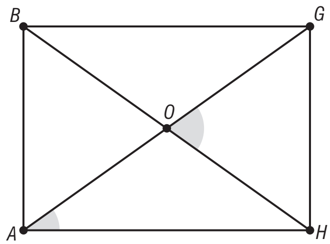
507. Szemeljük ki pl. a kocka A csúcsából induló AF és AH lapátlókat! Mivel a kocka lapátlóinak hossza egyenlő, ezért az AFH háromszög szabályos, következésképpen az AF és AH szakaszok bezárt szöge 60°.



508. A kocka bármely két testátlója egy síkban van, hiszen végpontjaik egy téglalap csúcsai. Az alábbi ábrán az AG és BH testátlókat adtuk meg.



Az $ABGH$ téglalapot a lap síkjában ábrázolva:

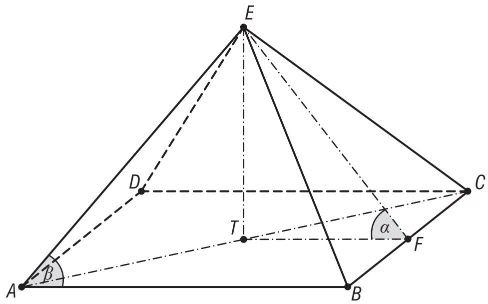


Mivel az AOH háromszög egyenlőszárú, így $GOH\sphericalangle = 2GAH\sphericalangle$. A GAH derékszögű háromszög felhasználásával, mivel $AH = \sqrt{2} \cdot HG$ (lapátló!)

$$\operatorname{tg} GAH\sphericalangle = \frac{HG}{AH} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ebből } GAH\sphericalangle \approx 35{,}26°;$$

ezért a testátlók hajlásszöge: $GOH\sphericalangle \approx 70{,}52°$.

509. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! Jelölje F a BC él felezőpontját, T pedig a magasság talppontját, ami az alaplap középpontja.



a) Mivel TF az alaplapot alkotó négyzet oldalhosszúságának fele, ezért $TF = 115$ méter. A síkok hajlásszögére vonatkozó definíció miatt a BCE oldallap és az $ABCD$ négyzet síkjának hajlásszöge $EFT\sphericalangle = \alpha$. Az ETF derékszögű háromszög felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{150}{115}, \text{ ebből } \alpha \approx 52,52°.$$

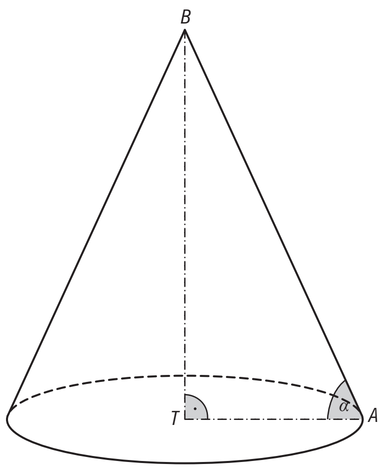
b) Az $ABCD$ négyzet AC átlójának hossza az oldalhosszúság $\sqrt{2}$-szerese, továbbá AT hossza az AC hosszának fele, ezért

$$AT = \frac{AC}{2} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \approx 162,63 \text{ méter.}$$

Az AE szakasz merőleges vetülete az AT szakasz, ezért az egyenes és sík hajlásszögére vonatkozó definíció miatt az $EAT\sphericalangle = \beta$ szög lesz az oldalél és alaplap hajlásszöge. Az EAT derékszögű háromszög felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{150}{162,63}, \text{ ebből } \beta \approx 42,69°.$$

510. a) Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



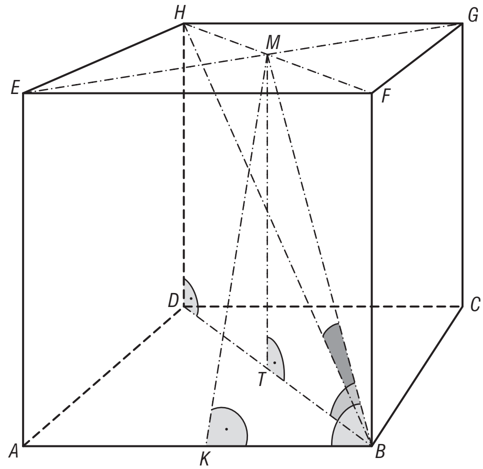
Az ábrán látható TAB derékszögű háromszög felhasználásával, ha $TAB\sphericalangle = \alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{TB}{TA} = \frac{8}{6}, \text{ ebből } \alpha \approx 53,13°.$$

b) Pitagorasz tételét használva az AB helyzetben lévő gerendára:

$$AB = \sqrt{AT^2 + BT^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ méter.}$$

511. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! A számítások egyszerűbben végezhetők el, ha 2 egység élű kockával dolgozunk.



a) Mivel az MB szakasznak az alapra eső merőleges vetülete a TB szakasz, így az $\alpha = MBT\sphericalangle$ meghatározása a feladatunk. Felhasználva, hogy $BD = FH = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, adódik, hogy $TB = MF = \sqrt{2}$. Az $MT = FB = 2$, ezért az MBT derékszögű háromszöget tekintve:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MT}{TB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ ebből } \alpha \approx 54,74°.$$

b) A szimmetrikus elhelyezkedés miatt MB az AB, illetve BC éllel ugyanakkora szöget zár be, ezért elég a $\beta = MBA\sphericalangle$ meghatározásával foglalkozni. Ha K jelöli az AB felezőpontját, akkor az ábra alapján β az MKB derékszögű háromszög egyik hegyesszöge. Pitagorasz tételét felhasználva:

$$MB = \sqrt{MT^2 + TB^2} = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6} \approx 2,45.$$

Így akkor

$$\cos\beta = \frac{BK}{MB} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ ebből } \beta \approx 65,91°.$$

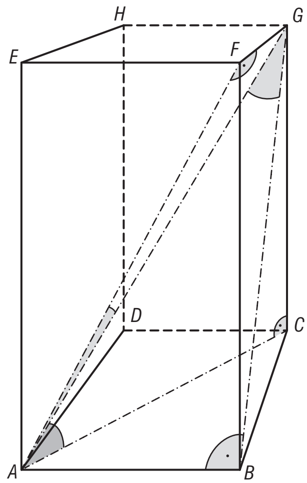
c) Mivel a H, M és B pontok az alaplapra merőleges $HDBF$ téglalap síkjában vannak, ezért a $\gamma = MBH\sphericalangle$ kiszámításához elég meghatároznunk $HBD\sphericalangle$-et, hiszen $\gamma = \alpha - HBD\sphericalangle$. A HBD derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} HBD\sphericalangle = \frac{HD}{DB} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ebből } HBD\sphericalangle \approx 35,26°,$$

ezért

$$\gamma \approx 54,74° - 35,26° = 19,48°.$$

512. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A feladatban szereplő arányok miatt $AB = 3x$ és $BC = 4x$ legyen az egyik lap két oldalának hossza, továbbá $GC = 12x$ a rá merőleges él hosszúsága. Kétszer alkalmazva Pitagorasz tételét az ABC, illetve ACG derékszögű háromszögekre:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (3x)^2 + (4x)^2 = 25x^2,$$

$$AG^2 = 169 = AC^2 + GC^2 = 25x^2 + 144x^2 = 169x^2, \text{ ebből } x = 1,$$

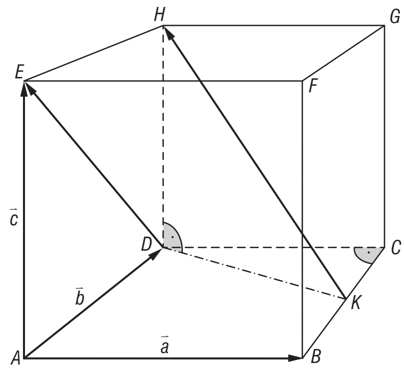
ezért $AB = 3$; $BC = 4$ és $GC = 12$ egység hosszúak a téglatest élei. Az AG testátló a szemközti lapokkal ugyanakkora szöget zár be, hiszen azok párhuzamosak, ezért elegendő az $ABCD$, $BCGF$ és $ABFG$ lapokkal bezárt szögeket meghatározni. Az AG merőleges vetülete ezekre a lapokra rendre AC, BG és AF, így a keresett szögek: $\alpha = GAC\sphericalangle$; $\beta = AGB\sphericalangle$ és $\gamma = GAF\sphericalangle$. Az ábrán látható derékszögű háromszögek felhasználásával:

$$\sin\alpha = \frac{GC}{AG} = \frac{12}{13}, \text{ ebből } \alpha \approx 67{,}38°,$$

$$\sin\beta = \frac{AB}{AG} = \frac{3}{13}, \text{ ebből } \beta \approx 13{,}34°,$$

$$\sin\gamma = \frac{FG}{AG} = \frac{4}{13}, \text{ ebből } \gamma \approx 17{,}92°.$$

513. Vektorokkal dolgozunk. Az A csúcsból a B, D és E csúcsokba indított vektorok legyenek rendre $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$. Feltehetjük, hogy a kocka élei egységnyi hosszúságúak.



A vektorműveletekből adódik, hogy

$$\overrightarrow{DE} = \vec{c} - \vec{b} \text{ és } \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KD} + \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}.$$

Képezzük a $\overrightarrow{DE}$ és $\overrightarrow{KH}$ skaláris szorzatát! Mivel $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ páronként merőlegesek, valamint egységnyi hosszúak, ezért

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{KH} = \left(\vec{c} - \vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0, valamint azt, hogy a vektor négyzete a hosszának négyzetével egyenlő.)

A skaláris szorzat definíciója miatt:

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{KH} = \left|\overrightarrow{DE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KH}\right| \cdot \cos\varphi,$$

ahol φ a bezárt szög.

Az egység élű kocka lapátlójának hossza $\sqrt{2}$. A DKC derékszögű háromszögre felírva Pitagorasz tételét:

$$DK = \sqrt{DC^2 + CK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

így ismét csak a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$KH = \sqrt{HD^2 + DK^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Így akkor $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{KH} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}$, ebből $\cos\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, amiből $\varphi = 76,37°$.

A vektorok bezárt szöge jelen esetben éppen egyeneseik hajlásszöge.

Megjegyzés:

Vektorok nélkül is megoldható a feladat. Vektorokat azért érdemes használni, mert ez a módszer kevésbé veszi igénybe a térlátásunkat.

514. Az $ABCDEFGH$ téglatest AG testátlója a Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával kifejezhető a B csúcsból induló élek segítségével, amint azt az **512.** feladat megoldásában láttuk. Azt kaptuk, hogy

$$AG^2 = AB^2 + BC^2 + BF^2;\text{ így } AG = \sqrt{4+9+36} = 7 \text{ cm.}$$

Ismeretes, hogy a testátlók felezési pontja egybeesik, így – mivel a testátlók egyenlő hosszúak – a köré írt gömb sugara 3,5 cm.

515. Feladatunk a testátló hosszának meghatározását kívánja, amit jelöljünk e-vel! Ha a téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza a, b és c, akkor Pitagorasz tétele miatt a lapátlók négyzeteire:

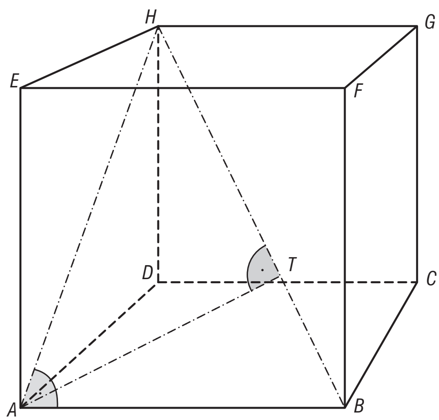
$$a^2 + b^2 = 13,$$
$$b^2 + c^2 = 40,$$
$$c^2 + a^2 = 45.$$

Összeadva az egyenleteket:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 98,\text{ ebből } a^2 + b^2 + c^2 = 49 = e^2,\text{ amiből } e = 7 \text{ cm.}$$

(Felhasználtuk azt, hogy $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$, amit az **512.** feladat megoldása közben igazoltunk.)

516. a) Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Jelölje a a kocka éleinek hosszát, T pedig az A csúcsból a BH testátlóra bocsátott merőleges talppontját! Az ABH háromszög derékszögű, hiszen AB merőleges az $ADHE$ síkra. Az AT a BH átfogóhoz tartozó magasság. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AB \cdot AH}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{BH \cdot AT}{2},$$

ahonnan $a^2 = a$, ebből $a = 1$ cm.

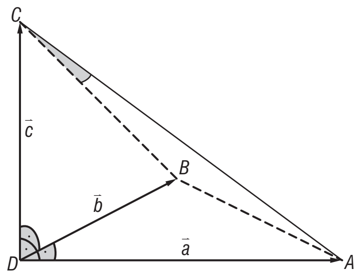
(Felhasználtuk, hogy az a élű kocka lapátlója $a\sqrt{2}$, testátlója pedig $a\sqrt{3}$ hosszúságú.)

Mivel a kocka beírt gömbjének sugara az élhosszúság fele, ezért ez most 0,5 cm.

b) Mivel a köré írt gömb sugara a testátló hosszának fele, ami:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \text{ cm.}$$

517. a) Vektorokkal dolgozunk, használjuk az alábbi ábra jelöléseit!

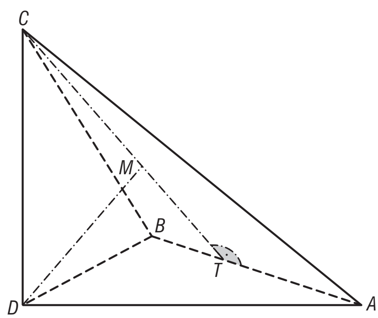


A vektorok skaláris szorzatának definíciójából következik, hogy két (nem nulla) vektor bezárt szöge pontosan akkor hegyesszög, ha skaláris szorzatuk pozitív. Legyen $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$! Ekkor $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$, így

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\vec{a} - \vec{c})\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{c}^{\,2} > 0,$$

miközben felhasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0. Ezzel beláttuk, hogy az $ACB\sphericalangle$ hegyesszög. Hasonlóan adódik az ABC háromszög másik két szögének hegyesszögű volta is.

b) Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Jelölje T a C merőleges vetületét az AB élen és M a D merőleges vetületét az ABC síkon! A továbbiakban többször is kihasználjuk, hogy ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor annak bármely egyenesére merőleges, továbbá, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két metsző egyenesére, akkor a sík bármely egyenesére merőleges.

$$DC \perp S_{ABD}, \text{ ezért } CD \perp AB,\ CT \perp AB, \text{ ezért } S_{CDT} \perp AB.$$

Másrészt

$$DM \perp S_{ABC}, \text{ ezért } DM \perp AB,\ DT \perp AB, \text{ ezért } S_{DTM} \perp AB,$$

következésképpen M rajta van a CT egyenesen, azaz az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasságán. A fentihez hasonló módon igazolható, hogy a másik két magasságon is rajta van, tehát M az ABC háromszög magasságpontja.

7.3. Felszín- és térfogatszámítás

518. Az a élhosszúságú kocka felszíne $6a^2$, ezért $a = 4$ cm. A térfogat a^3, így $V = 64\ \text{cm}^3$.

519. A Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával könnyen adódik, hogy az a élhosszúságú kocka testátlójának hossza $a\sqrt{3}$. A feladatban szereplő kocka testátlója $10\sqrt{3}$ cm-es, ezért a kocka éle 10 cm.

a) A térfogatképlet miatt: $V = a^3 = 1000\ \text{cm}^3$.

b) A felszínképlet miatt: $A = 6a^2 = 600\ \text{cm}^2$.

520. A feladat szövege szerint, ha a, b és c jelöli a három egy csúcsból induló él hosszát, akkor $b = \frac{2}{3}a = \frac{3}{2}c$. Innen könnyen adódik, hogy $c = \frac{4}{9}a$. A térfogatképletet alkalmazva:

$$V = abc = a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{4}{9}a = \frac{8}{27}a^3 = 216,$$

ahonnan $a = 9$ cm.

Innen $b = 6$ cm és $c = 4$ cm.

A felszín:

$$A = 2(ab + bc + ca) = 2(9 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 9) = 228\ \text{cm}^2.$$

521. Legyenek az egy csúcsból kiinduló élek: $a = 2x$; $b = 3x$; $c = 5x$ hosszúak! A téglatest térfogatképlete miatt akkor

$$240\ \text{cm}^3 = abc = 30x^3, \text{ ebből } x = 2\ \text{cm}.$$

Az élek hossza:

$$a = 4\ \text{cm};\ b = 6\ \text{cm};\ c = 10\ \text{cm}.$$

A téglatest felszínképletét alkalmazva:

$$A = 2(ab + bc + ca) = 2(4 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 10 \cdot 4) = 248\ \text{cm}^2.$$

522. Ha az egy csúcsból induló élek hossza dm-ben mérve a, b és c, akkor, mivel $1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$:

$$ab = 12,$$
$$bc = 15,$$
$$ca = 20.$$

A téglatest térfogata dm^3-ben mérve $V = abc$, így a három egyenlet megfelelő oldalait összeszorozva:

$$(abc)^2 = 3600 = V^2,$$

ahonnan $V = 60\ \text{dm}^3 = 60$ liter.
Ennél több víz tehát nem tölthető az akváriumba.

523. A lakás térfogata az alapterület és a belmagasság szorzata, hiszen hasábról van szó. Ez alapján a régi lakás térfogata $75 \cdot 2{,}6 = 195\ \text{m}^3$, az új lakás térfogata pedig $279\ \text{m}^3$. Az egyenes arányosság miatt a térfogatok hányadosa egyenlő a fűtési költségek hányadosával: $\dfrac{279}{195} \approx 1{,}43$.
Tehát az új lakás fűtési költsége 43%-kal lesz nagyobb, mint a régié volt.

524. Mivel a tégla térfogata az egy csúcsból induló élek hosszúságainak szorzata, így az új típusú tégla térfogata a régebbi típusnak $1{,}25^3$-szerese. Az egyes téglák térfogata és az összes téglák szükséges darabszáma fordítottan arányos egymással, ezért az új típusból a réginek $\dfrac{1}{1{,}25^3} = 0{,}512$-szerese szükséges, tehát 48,8%-kal kell kevesebb.

525. Ha x az eredeti kocka élhossza cm-ben mérve, akkor a kocka felszínképlete miatt felírható az alábbi egyenlet:

$$6x^2 + 96 = 6(x+2)^2.$$

Ennek megoldása:

$$6x^2 + 96 = 6(x^2 + 4x + 4),$$
$$6x^2 + 96 = 6x^2 + 24x + 24,$$
$$72 = 24x,$$
$$x = 3.$$

Így a térfogat:

$$V = 3^3 = 27\ \text{cm}^3.$$

526. Jelölje az első gerenda alapnégyzetének élhosszúságát *a*, magasságának nagyságát pedig *b*! Ekkor a második gerenda alapnégyzetének élhosszúsága 0,8*a*; magassága pedig 1,5*b*.
A téglatestek térfogatképlete miatt az első gerenda térfogata a^2b; a másodiké pedig

$$(0,8a)^2 \cdot 1,5b = 0,64 \cdot 1,5a^2b = 0,96a^2b.$$

Tehát az első gerenda térfogata a nagyobb.

527. Ha *x* az eredeti kocka élhossza cm-ben mérve, akkor a kocka térfogatképlete miatt:

$$x^3 + 98 = (x+2)^3.$$

Innen:

$$x^3 + 98 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8,$$

$$0 = 6x^2 + 12x - 90,$$

$$0 = x^2 + 2x - 15.$$

Ennek pozitív megoldása $x = 3$.
Az eredeti kocka felszíne:

$$A = 6x^2 = 54 \text{ cm}^2.$$

528. Ha a téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza cm-ben mérve *a*, *b* és *c*, akkor Pitagorasz tétele miatt a lapátlók négyzeteire:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ b^2 + c^2 = 40, \\ c^2 + a^2 = 45. \end{cases}$$

Összeadva az egyenleteket:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 98, \text{ ebből } a^2 + b^2 + c^2 = 49.$$

Innen

$$c^2 = 36, \text{ ebből } c = 6,$$

$$a^2 = 9, \text{ ebből } a = 3,$$

$$b^2 = 4, \text{ ebből } b = 2.$$

a) A térfogat:

$$V = abc = 36 \text{ cm}^3.$$

b) A felszín:

$$A = 2(ab + bc + ca) = 72 \text{ cm}^2.$$

529. Ha az egy csúcsból induló élek hossza cm-ben mérve *a*, *b* és *c*, akkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$a^2+b^2+c^2=27^2=729,$$
$$a+b+c=42.$$

A második egyenlet mindkét oldalának négyzetét véve, nevezetes azonosság miatt:
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1764,$$
$$729+2(ab+bc+ca)=1764,$$
$$2(ab+bc+ca)=1035.$$
Tehát a téglatest felszíne 1035 cm^2.

530. Jelölje a, b és c az egy csúcsból kiinduló élek hosszát dm-ben mérve! Ekkor a testátló hossza $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, az a és b oldalú oldallap kerülete $2(a+b)$, a drótváz hossza pedig $4(a+b+c)$. Ezek alapján felírhatók az alábbi egyenletek:
$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=49, \\ a+b=5, \\ a+b+c=11. \end{cases}$$
Innen $c=6$; ezért
$$a^2+(5-a)^2=49-36=13,$$
$$2a^2-10a+25=13,$$
$$a^2-5a+6=0.$$
Ennek az egyenletnek a megoldásai $a_1=2$; illetve $a_2=3$; amelyekből $b_1=3$ és $b_2=2$.

a) A térfogatképletet alkalmazva:
$$V=abc=2\cdot3\cdot6=36 \text{ dm}^3 = 36 \text{ liter}.$$
b) A felszínre vonatkozó képletet alkalmazva:
$$A=2(ab+bc+ca)=2(2\cdot3+3\cdot6+6\cdot2)=72 \text{ dm}^2=0{,}72 \text{ m}^2.$$

531. Mivel 1 liter = 1 dm^3, valamint 1 dm^2 = 100 cm^2, ezért a doboz térfogata 75 dm^3, az adott lapjának területe pedig 25 dm^2. A rá merőleges él hossza ezért a hasábok térfogatképlete miatt: $\frac{75}{25}=3$ dm.

Ha a és b az adott lap élhosszúságai dm-ben mérve, akkor $ab=25$, így a doboz felszíne dm^2-ben mérve:
$$A=2(3a+3b+25)=50+6(a+b)=50+6\left(a+\frac{25}{a}\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$a+\frac{25}{a}\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot\frac{25}{a}}=10;$$

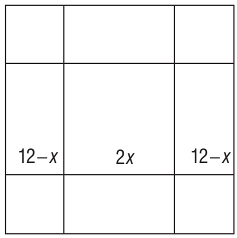
ezért

$$A\geq 50+6\cdot 10=110\ \text{dm}^2=1{,}1\ \text{m}^2.$$

Tehát legalább 1,1 m^2 papírra van szükség a becsomagoláshoz. Ennyi papír pontosan akkor lehet elegendő, ha az alaplap egy 5 dm oldalhosszúságú négyzet, hiszen a felhasznált egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha

$$a=\frac{25}{a},\ \text{ebből}\ a=5.$$

532. Tekintsük az alábbi ábrát!



A doboz térfogata:

$$V=V(x)=(2x)^2(12-x)=4x^2(12-x)=-4x^3+48x^2;$$

ahol $0<x<12$.

Differenciálással kapható, hogy

$$V'=-12x^2+96x=-12x(x-8).$$

Innen adódik, hogy

$$V'=0,\ \text{ebből}\ x=8.$$

Mivel

$$V''=-24x+96,\ \text{ebből}\ V''(8)<0;$$

ezért az $x=8$ helyen a térfogatnak maximuma van, továbbá ez az egyetlen ilyen hely az adott intervallumon. A levágott négyzetek oldala tehát a maximális doboztérfogat esetén 4 cm.

A maximális doboztérfogat:

$$V_{\max}=V(8)=1024\ \text{cm}^3.$$

533. a) Ha az egy csúcsból induló élek hossza cm-ben mérve a, b és c, akkor a felszínre vonatkozó képletből $ab+bc+ca=300$, továbbá a testátló hossza $e=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Mivel

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\geq 0,$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

ezért $e\geq\sqrt{300}$.

Mivel az igazolt egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a=b=c=10$, így 10 cm élű kocka esetén lesz a testátló a legkisebb.

b) A térfogat $V=abc$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$100=\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{V^2},$$

$$1000\geq V.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$ab=bc=ca,\text{ ebből } a=b=c;$$

tehát 10 cm élű kocka esetén lesz a térfogat maximális.

534. Legyenek a téglatest egy csúcsból induló élei x, y, z! Ekkor a feltételek szerint:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ \underline{2xy+2yz+2zx=94} \end{cases}$$

Adjuk össze a két egyenletet!

$$(x+y+z)^2=144.$$

Mivel $x+y+z$ pozitív, $x+y+z=12$.

Fejezzük ki z-t ebből az egyenletből!

$$z=12-x-y.$$

Helyettesítsünk az első egyenletbe! Kapjuk, hogy

$$(0)\quad y^2+(x-12)y+x^2-12x+47=0.$$

Ennek az y-ra nézve másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$(x-12)^2-4\left(x^2-12x+47\right)\geq 0,$$

$$3x^2-24x+44\leq 0,$$

$$(1)\quad 4-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Megoldva a (0) másodfokú egyenletet, kapjuk, hogy

$$y_{12}=\frac{12-x\pm\sqrt{-3x^2+24x-44}}{2}.$$

Visszahelyettesítve, z-re kapjuk, hogy

$$z_{12} = \frac{12 - x \pm \sqrt{-3x^2 + 24x - 44}}{2}.$$

Ekkor a térfogat:

$$(2)\ \ V = xyz = x^3 - 12x^2 + 47x.$$

Ennek a szélsőértékeit keressük a $\left[4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}; 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ zárt intervallumon. A (2) függvény deriváltja:

$$V'(x) = 3x^2 - 24x + 47.$$

Ennek zérushelyei az intervallum belső pontjaiban lehetséges szélsőértékhelyek.

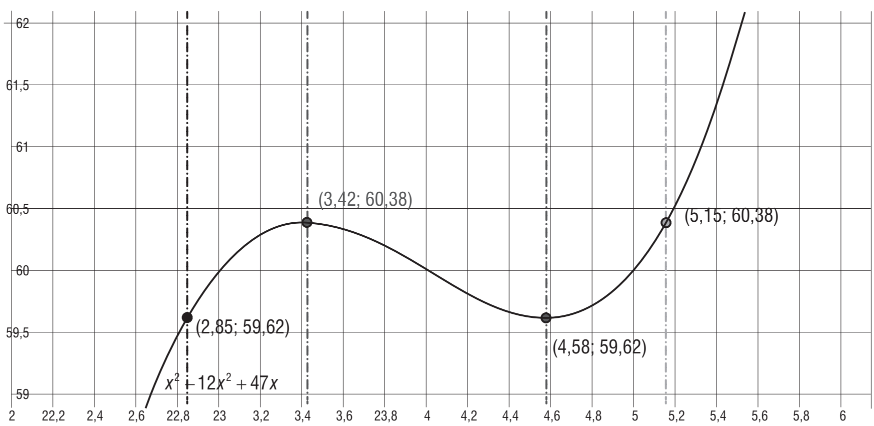
$$x_{0_1} = 4 - \frac{\sqrt{3}}{3},\ x_{0_2} = 4 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A derivált függvény előjelének vizsgálatából megállapítható, hogy $4 - \frac{\sqrt{3}}{3}$-ban helyi maximum, a $4 + \frac{\sqrt{3}}{3}$-ban helyi minimum van. Az intervallum végpontjait is megvizsgálva kapjuk, hogy a maximum:

$$V_{\text{max.}} = 60 + \frac{2\sqrt{3}}{9} = V\left(4 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = V\left(4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

A minimum:

$$V_{\text{min.}} = 60 - \frac{2\sqrt{3}}{9} = V\left(4 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = V\left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$



535. A hasáb alaplapja egy a oldalú szabályos háromszög, magassága pedig szintén a, ahol a hosszúságot cm-ben értjük. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; ezért a térfogatra: $36=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Innen $a\approx 4{,}36$ cm.

536. A trapéz területét a területképlet alapján számolhatjuk ki:

$$t=\frac{14+10}{2}\cdot 3=36\ \text{cm}^2.$$

A hasáb térfogata a térfogatképlet alapján:

$$V=t\cdot m=36\cdot 4=144\ \ \text{cm}^3.$$

Mivel a tömeg a sűrűség és a térfogat szorzata, ezért a kalapácsfej tömege:

$$7{,}5\cdot 144=1080\ \text{g}=108\ \text{dkg}.$$

537. a) Az alaplapot képező szabályos hatszöget hat darab $a=4$ cm oldalhosszúságú szabályos háromszögre bonthatjuk. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ezért az alapterület:

$$6\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\approx 41{,}57\ \text{cm}^2.$$

A hasáb térfogata 1000 cm^3, így a magasság a térfogatképletből:

$$m=\frac{V}{t}=\frac{1000}{41{,}57}\approx 24{,}1\ \ \text{cm}.$$

b) A hasáb palástjának területe hat egybevágó, 4 cm és 24,1 cm oldalú téglalap területének összege, így a felszíne:

$$A=6\cdot 4\cdot 24{,}1+2\cdot 41{,}57=659{,}14\ \text{cm}^2\approx 6{,}6\ \text{dm}^2.$$

Ezért legalább ennyi csomagolóanyag kell az elkészítéséhez.

538. Az előző feladatban látott módon először kiszámítjuk egy padlólap területét, illetve térfogatát. A kapott eredmények:

$$t=259{,}8\ \text{cm}^2 \text{ és } V=207{,}84\ \text{cm}^3.$$

A szükséges lapok számának megállapításához a konyha alapterületét cm^2-be átváltjuk, így:

$$\frac{20\cdot 100\cdot 100}{259{,}8}\approx 769{,}8,$$

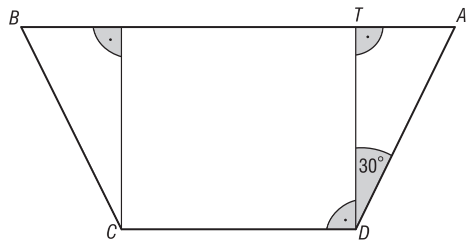
tehát 770 darab kell.

Mivel a sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, ezért a padlólapok tömege:

$$770\cdot 207{,}84\cdot 1{,}8\approx 288066\ \text{gramm},$$

ami közelítőleg 288 kg.

539. A vízzel kitöltött rész egyenes hasáb alakú, melynek magassága $m = 100$ m, alapja pedig a keresztmetszetnek megfelelő szimmetrikus trapéz. Tekintsük az alábbi ábrát!



Az ATD derékszögű háromszögből:

$$\frac{AT}{AD} = \sin 30°, \text{ ebből } AT = 0{,}5; \quad \frac{TD}{AD} = \cos 30°, \text{ ebből } TD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A trapéz területképletének felhasználásával, mivel $AB = 1 + 2 \cdot 0{,}5 = 2$; így

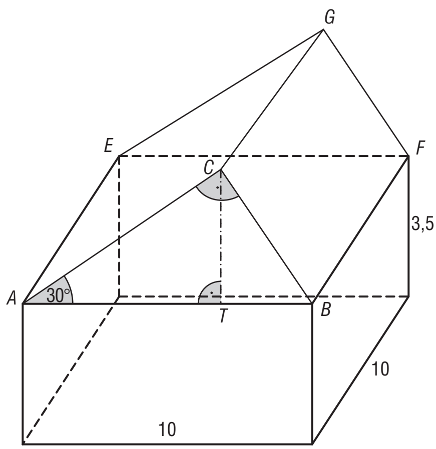
$$t = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

A hasáb térfogata:

$$V = t \cdot m \approx 130 \text{ m}^3,$$

vagyis ennyi víz fér el az árokban.

540. a)



b) Mivel $AB = 10$ m, ezért $BC = AB \cdot \sin 30° = 5$ m és $AC = AB \cdot \cos 30° \approx 8{,}66$ m. Az ABC derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva:

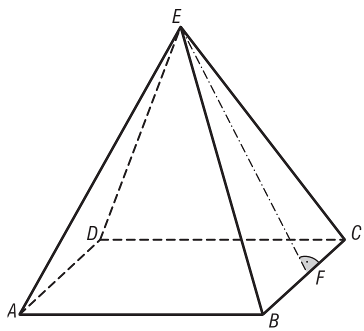
$$t = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot TC}{2},$$
$$\frac{8,66 \cdot 5}{2} = \frac{10 \cdot CT}{2},$$
$$CT = 4,33 \text{ m},$$

ami a padlás magassága.

c) A hasáb magassága 10 m, az alapjának területe pedig
$$t = \frac{10 \cdot 4,33}{2} = 21,65 \text{ m}^2,$$
ezért térfogata:
$$V = 10 \cdot 21,65 = 216,5 \approx 217 \text{ m}^3.$$

d) A lefedendő területet az $ACGE$ és $BFGC$ téglalapok területének összege adja meg, ami a fenti eredmények alapján:
$$AC \cdot CG + BC \cdot CG = 8,66 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 136,6 \text{ m}^2.$$
A tető lefedéséhez tehát 137 m^2 cserép szükséges.

541. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!

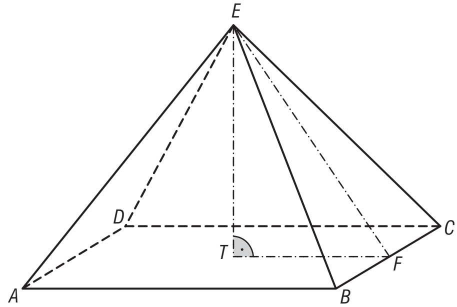


Ha F jelöli a BC él felezőpontját, akkor $FC = 5$ méter, továbbá az EFC háromszög derékszögű (hiszen EBC háromszög egyenlő szárú). Pitagorasz tételét alkalmazva:
$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}.$$

A lefestendő felület az EBC háromszög területének 4-szerese: $4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ m}^2$, ezért legalább $\frac{240}{12} = 20$ liter festék szükséges a lefestéséhez.

542. a) Mivel a gúla alapja négyzet, így alapéle $\sqrt{t} = \sqrt{36} = 6$ cm hosszú. Az oldallapok egybevágó egyenlő szárú háromszögek, ezért a felszín:
$$A = 36 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 96 \text{ cm}^2.$$

b)



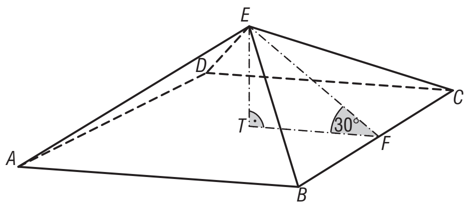
Jelölje T a gúla magasságának talppontját, F pedig a BC él felezőpontját! Az ETF derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt adódik, hogy a gúla magassága:

$$m = ET = \sqrt{EF^2 - TF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm},$$

így a térfogat:

$$V = \frac{t \cdot m}{3} = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3.$$

543. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



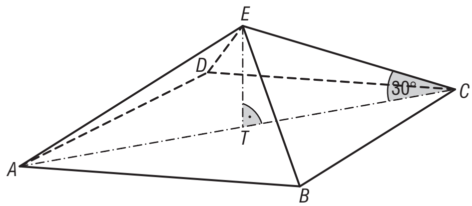
Az ETF derékszögű háromszögből:

$$\frac{ET}{EF} = \frac{4}{EF} = \sin 30°, \text{ ebből } EF = 8,$$

$$\frac{ET}{TF} = \frac{4}{TF} = \operatorname{tg} 30°, \text{ ebből } TF = 6{,}93, \text{ amiből } BC = AB = 2TF = 13{,}86.$$

A cserepek által lefedett terület: $4 \cdot \dfrac{BC \cdot EF}{2} \approx 221{,}8 \text{ m}^2.$

544. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



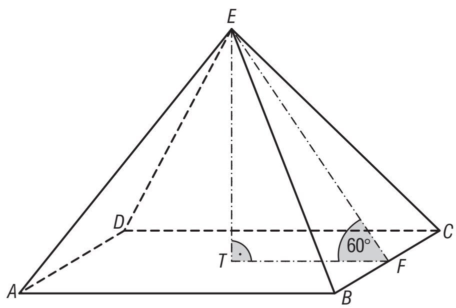
Az ETC derékszögű háromszögből:

$$\frac{ET}{TC} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ ebből } TC = 4\sqrt{3}, \text{ amiből } AC = 2TC = 8\sqrt{3}.$$

Mivel egy négyzet területét úgy is megkaphatjuk, hogy az átló hosszának négyzetét 2-vel osztjuk, így az $ABCD$ négyzet területe 96 m^2. A gúlára vonatkozó térfogatképletet alkalmazva a padlás térfogata:

$$V = \frac{96 \cdot 4}{3} = 128 \text{ m}^3.$$

545. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) Az ETF derékszögű háromszög felhasználásával:

$$\cos 60° = \frac{TF}{EF}, \text{ ebből } EF = \frac{TF}{0,5} = 40.$$

A palást területe:

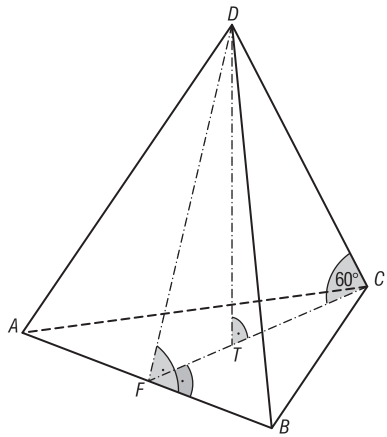
$$P = 4 \cdot \frac{40 \cdot 40}{2} = 3200 \text{ m}^2.$$

b) Pitagorasz tételéből:

$$ET = \sqrt{EF^2 - TF^2} \approx 34,64 \text{ m},$$

ami a piramis magassága.

546. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) A gúla magasságának T talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja lesz. Mivel a szabályos háromszög súlyvonala egyben magasság is, továbbá a súlypont a súlyvonalakat $2:1$ arányban osztja, ezért

$$TC = \frac{2}{3}FC = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy a szabályos háromszög magassága az oldal hosszának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese.)

A gúla magassága ezért:

$$\frac{TD}{TC} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}, \text{ ebből } TD = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; ezért az alapterület:

$$t \approx 0{,}974 \text{ cm}^2.$$

A gúlára vonatkozó térfogatképletet miatt:

$$V = \frac{t\cdot m}{3} \approx 0{,}49 \text{ cm}^3.$$

b) Mivel

$$FT = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

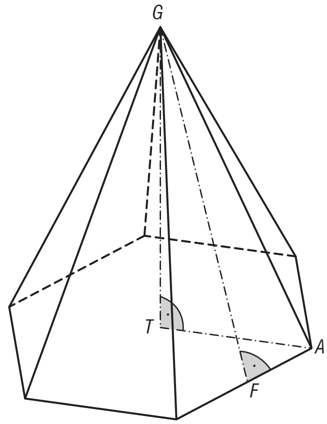
így a Pitagorasz-tétel miatt:

$$FD = \sqrt{TD^2 + FT^2} \approx 1{,}561.$$

A felszín:

$$A = 0{,}974 + 3\cdot\frac{1{,}5\cdot 1{,}561}{2} \approx 4{,}5 \text{ cm}^2.$$

547. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) Az alapot képező szabályos hatszöget hat darab $a = 0,9$ m oldalú szabályos háromszögre bonthatjuk. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; ezért az alapterület:

$$t = 6 \cdot \frac{0,9^2\sqrt{3}}{4} \approx 2,1 \text{ m}^2.$$

Az ATG derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét:

$$m = AT = \sqrt{1,5^2 - 0,9^2} = 1,2 \text{ m}.$$

A gúlák térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \frac{t \cdot m}{3} = \frac{2,1 \cdot 1,2}{3} = 0,84 \text{ m}^3.$$

b) Az oldallap GF magasságát szintén Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg:

$$GF = \sqrt{AG^2 - FA^2} = \sqrt{1,5^2 - 0,45^2} \approx 1,43 \text{ m}.$$

A palást területe:

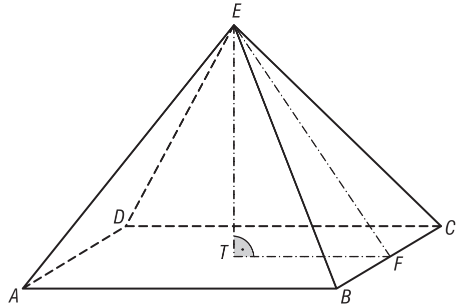
$$P = 6 \cdot \frac{0,9 \cdot 1,43}{2} \approx 3,86 \text{ m}^2.$$

548. Legyen a az alapél hossza cm-ben mérve, m pedig jelölje a test magasságát! Ekkor a felszínre:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{15a}{2} = 864,$$

$$a^2 + 30a - 864 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása: $a = 18$.



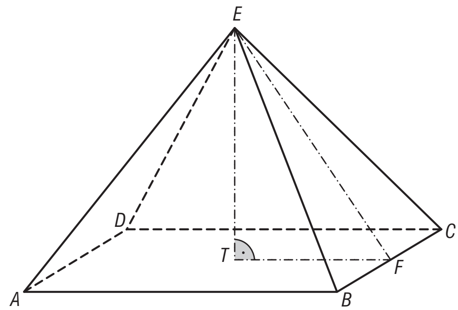
Pitagorasz tétele miatt:

$$ET = m = \sqrt{EF^2 - TF^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}.$$

A gúla térfogata

$$V = \frac{18^2 \cdot 12}{3} = 1296 \text{ cm}^3.$$

549. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) A gúlára vonatkozó térfogatképlet miatt a piramis térfogata:

$$V = \frac{230^2 \cdot 150}{3} = 2\,645\,000 \text{ m}^3.$$

A tömeg a térfogat és a sűrűség szorzata, ezért a piramis tömege 7 141 500 tonna.

b) Mivel egy szerelvény összesen $40 \cdot 50 = 2000$ tonna követ tud elszállítani és $\frac{7141500}{2000} = 3570,75$; ezért 3571 szerelvényre lenne szükség.

c) A palást területét kell meghatároznunk, ami a négy oldallap területének összege. Ha F a BC él felezési pontja és T a magasság talppontja, akkor Pitagorasz tétele miatt:

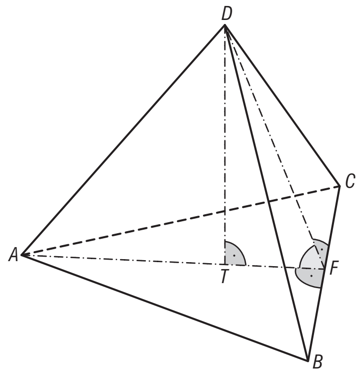
$$EF = \sqrt{ET^2 + TF^2} = \sqrt{150^2 + 115^2} \approx 189,01 \text{ m}.$$

Az oldallapok területének összege ezért:

$$4 \cdot \frac{230 \cdot 189,01}{2} = 86944,6 \text{ m}^2.$$

Tehát legalább 86 945 m^2 textilre lesz szüksége.

550. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) A szabályos tetraéder határoló lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; így a tetraéder felszíne:

$$A = 4 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \approx 249,42 \text{ cm}^2.$$

b) A két sík hajlásszögére vonatkozó definíció miatt a keresett szög az ábrán látható $\alpha = DFT\sphericalangle$.

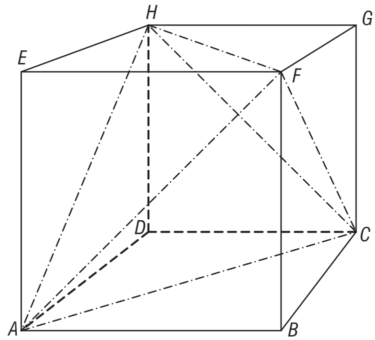
(A DF egyenes és az AF egyenes is merőleges a BC oldalélre.) Mivel T az ABC lap súlypontja, ezért a súlyvonalat $2:1$ arányban osztja, így

$$TF = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3}DF.$$

A DFT derékszögű háromszög felhasználásával:

$$\cos\alpha = \frac{TF}{DF} = \frac{1}{3}, \text{ ebből } \alpha \approx 70,53°.$$

551. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) A szabályos tetraéder térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a kocka térfogatából levonjuk a *B*, *G*, *D* és *E* csúcsnál levágott derékszögű tetraéderek térfogatát. Mivel ezek a testek egybevágók, ezért térfogatuk egyenlő, így elegendő pl. az *ABCF* tetraéder térfogatát meghatározni. Az *ABC* háromszög területe az alaplap területének fele, tehát $\frac{18^2}{2} = 162\ \text{cm}^2$. Mivel a hozzá tartozó magasság a *BF* él, így a gúlák térfogatképletét alkalmazva:

$$V_{ABCF} = \frac{162 \cdot 18}{3} = 972\ \text{cm}^3;$$

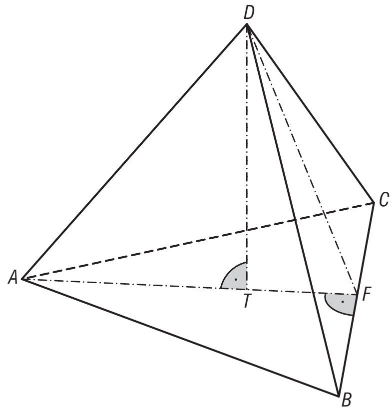
ezért a szabályos tetraéder térfogata:

$$V_{ACHF} = 18^3 - 4 \cdot 972 = 1944\ \text{cm}^3.$$

b) A szabályos tetraéder határoló lapjai olyan egybevágó szabályos háromszögek, melyek oldala a kocka valamely lapátlója. Mivel az *a* oldalú szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, továbbá a lapátló hossza $18\sqrt{2}$ cm, így a tetraéder felszíne:

$$4 \cdot \frac{\left(18\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 648\sqrt{3} \approx 1122{,}37\ \text{cm}^2.$$

552. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A magasság T talppontja az ABC háromszög súlypontja, így $AT=\frac{2}{3}AF$. A szabályos háromszög magassága az oldalhosszúság $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, ezért

$$AT=\frac{2}{3}AF=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a;$$

ahol a az alapél hossza cm-ben mérve. A szabályos tetraéder minden éle egyenlő hosszú, így az ATD háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét:

$$AT^2=a^2-10^2,\text{ ebből }\frac{a^2}{3}=a^2-100;$$

ahonnan $a=\sqrt{150}$.

Az alapterület:

$$t=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\approx 64{,}95\text{ cm}^2.$$

A térfogat:

$$V=\frac{t\cdot m}{3}\approx 216{,}5\text{ cm}^3.$$

A tömeg a sűrűség és a térfogat szorzata, így a gyertya tömege $216{,}5\cdot 0{,}9\approx 195$ g.

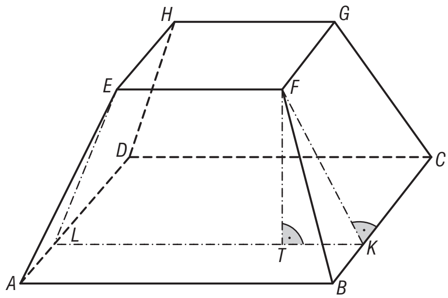
553. Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 7^2} + 7^2\right) = 73 \text{ m}^3 = 73\,000 \text{ liter.}$$

554. a) Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$$V = \frac{4}{3}\left(10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 4^2} + 4^2\right) = 208 \text{ cm}^3.$$

b) Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Legyen az F merőleges vetülete az alaplapon T és tekintsük az alaplapra merőleges, az E, F és T pontokra illeszkedő síkot! Mivel $KFEL$ szimmetrikus trapéz, ezért

$$TK = \frac{10-4}{2} = 3 \text{ cm.}$$

Pitagorasz tétele miatt:

$$FK = \sqrt{FT^2 + TK^2} = 5 \text{ cm;}$$

ami az oldallap magassága.

A felszín az alap- és fedőnégyzet, valamint az oldallapokat alkotó négy szimmetrikus trapéz területének összege lesz:

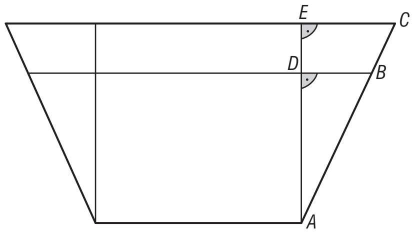
$$A = 10^2 + 4^2 + 4 \cdot \frac{10+4}{2} \cdot 5 = 256 \text{ cm}^2.$$

555. Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$416 = \frac{m}{3}\left(10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 4^2} + 4^2\right)$, ebből $m = 8$ cm

a cserép magassága.

A föld által elfoglalt rész egy 4 cm alapélű, $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ cm magasságú, felfelé szélesedő szabályos csonka gúla. Ha az eredeti elrendezést elmetsszük az alapjára merőleges és az egyik alapélre illeszkedő síkkal, akkor a metszetalakzat egy szimmetrikus trapéz lesz, ami az alábbi ábrán látható. A trapéz alapjai 4, illetve 10 cm hosszúak.



Az $AD = 6$ cm; $AE = 8$ cm; $EC = \frac{10-4}{2} = 3$ cm. Az ABD és ACE háromszögek megfelelő szögei páronként egyenlőek, így a két háromszög hasonló, ezért

$$\frac{6}{8} = \frac{DB}{EC} = \frac{DB}{3}, \text{ ebből } DB = 2{,}25 \text{ cm.}$$

Ebből adódik, hogyha csak $\frac{3}{4}$ részéig van tele a cserép, akkor a fedőlapot alkotó négyzet oldalhosszúsága $4 + 2 \cdot 2{,}25 = 8{,}5$ cm. Behelyettesítve a csonka gúla térfogatképletébe:

$$V = \frac{6}{3} \cdot \left(8{,}5^2 + \sqrt{8{,}5^2 \cdot 4^2} + 4^2\right) = 244{,}5 \text{ cm}^3.$$

556. A labdáról feltesszük, hogy gömb alakú, így sugara $r = 12$ cm. A gömb térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \approx 7238 \text{ cm}^3 \approx 7{,}24 \text{ liter.}$$

557. A gömb felszínére vonatkozó képletet alkalmazva:

$$A = 4\pi r^2 \approx 5{,}115 \cdot 10^8 \text{ km}^2.$$

558. a) A gömb felszínképlete miatt a felszínek aránya a sugarak négyzetének aránya, azaz $1:4:9$.

b) A gömb térfogatképlete miatt a térfogatok aránya a sugarak köbének aránya, azaz $1:8:27$.

559. a) Mivel egy kis csepp térfogata 0,01 cm^3 lesz, így a gömb térfogatképletét alkalmazva:

$$0{,}01 = \frac{4\pi r^3}{3}, \text{ ebből } r = \sqrt[3]{\frac{0{,}03}{4\pi}} \approx 0{,}134 \text{ cm.}$$

b) Az eredeti csepp sugarát az a) részben látott módon határozhatjuk meg:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \approx 0{,}62 \text{ cm.}$$

A gömb felszínképletét alkalmazva a nagy cseppre:

$$A = 4\pi R^2 \approx 4,83\ \text{cm}^2.$$

A kis cseppek felszínének összege

$$100 \cdot 4\pi r^2 \approx 22,564\ \text{cm}^2,$$

tehát a felületnövekedés aránya: $\dfrac{22,564}{4,83} \approx 4,67.$

560. Mivel az r sugarú gömb felszíne $A = 4\pi r^2$, ezért a kupola befedéséhez szükséges lemez területe legalább $\dfrac{4\pi \cdot 10^2}{2} \approx 628,32\ \text{m}^2.$

561. A gömb térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} \approx 268\ \text{cm}^3.$$

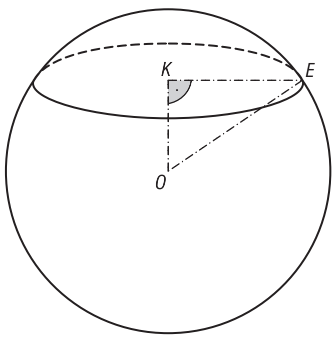
Ennek 85%-a: $228\ \text{cm}^3 \approx 2,28\ \text{dl}.$

562. Ha r az új gömb sugara cm-ben mérve, akkor a térfogatképlet miatt:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(3^3 + 4^3 + 5^3\right), \text{ ebből } r^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3,$$

ahonnan $r = 6$ cm.

563. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A síkmetszet kör, hiszen a síkra merőleges, a gömb középpontján átmenő egyenes olyan K pontban metszi a síkot, melytől a metszésvonal bármely E pontja ugyanakkora

$$r = \sqrt{5^2 - OK^2}$$

távolságra van.

Ha r a metszetkör sugara, akkor a kör területképlete miatt

$$\pi r^2 = 50,26, \text{ ebből } r = KE = 4\ \text{cm}.$$

Így a keresett távolság: $OK = 3$ cm.

564. Tegyük fel, hogy az üreg sugara cm-ben mérve r! A sűrűség a tömeg és a térfogat hányadosa, így a lövedék anyagának térfogata tömegének és sűrűségének hányadosa: $\frac{6850}{7,5} \approx 913,3 \text{ cm}^3$. Ez kiszámítható a lövedék és az üreg térfogatának különbségeként:

$$\frac{4\pi\left(r+2\right)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} = 913,3.$$

Rendezés után:

$$\left(r+2\right)^3 - r^3 = 218,$$
$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 - r^3 - 218 = 0,$$
$$6r^2 + 12r - 210 = 0,$$
$$3r^2 + 6r - 105 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása: $r = 5$.
Az üreg sugara tehát kb. 5 cm volt.

565. a) A henger térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \approx 3,14 \text{ m}^3 = 3140 \text{ liter}.$$

b) Az alap és a palást területe összesen:

$$\pi \cdot 1^2 + 2\pi \cdot 1 \cdot 1 = 3\pi \text{ m}^2,$$

így, ha A a lefedéshez szükséges minimális anyag mennyisége, akkor

$$A \cdot 0,94 = 3\pi, \text{ ebből } A \approx 10 \text{ m}^2.$$

566. Ha m az edény magassága cm-ben mérve, akkor

$$\pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot m = 480,$$
$$m \approx 9,73.$$

A térfogat:

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot m \approx 1100 \text{ cm}^3.$$

567. Először kiszámítjuk a cső anyagának térfogatát a henger térfogatképletének segítségével:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 600 - \pi \cdot 2,5^2 \cdot 600 = 1650\pi \approx 5183,63 \text{ cm}^3.$$

A tömeg a sűrűség és a térfogat szorzata, ezért a cső tömege:

$$m \approx 38877 \text{g} \approx 39 \text{ kg}.$$

568. A víz által kitöltött rész is henger alakú, melynek alapköre ugyanaz, mint a fazéké, így a henger térfogatképlete miatt a térfogatok aránya egyenlő a magasságok arányával:

$$\frac{4}{10} = \frac{m}{20}, \text{ ebből } m = 8 \text{ cm}.$$

569. A hús térfogata egyenlő a kiszorított víz térfogatával, amely egy 6 cm sugarú, 2 cm magasságú henger térfogata:

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 2 \approx 226{,}2 \ \text{cm}^3.$$

570. Jelölje r az alapkör sugarának, m pedig a magasságnak a mérőszámát! A tengelymetszet egy $2r$, illetve m oldalhosszúságokkal bíró téglalap. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\begin{cases} 2rm = 126, \\ r^2 m = 441. \end{cases}$$

Elosztva őket:

$$\frac{r}{2} = 3{,}5, \text{ ebből } r = 7, \text{ amiből } m = 9.$$

Behelyettesítve a felszín képletébe:

$$A = 2\pi r\left(r+m\right) = 224\pi \approx 703{,}7 \ \text{cm}^2.$$

571. Jelölje r az alapkör sugarának, m pedig a magasságnak a mérőszámát dm-ben mérve! Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\begin{cases} \pi r^2 m = 6, \\ 0{,}2\left(2\pi r^2 + 2\pi rm\right) = \pi r^2. \end{cases}$$

Az elsőből:

$$m = \frac{6}{\pi r^2},$$

amit behelyettesítve:

$$0{,}2\left(2\pi r^2 + \frac{12}{r}\right) = \pi r^2,$$

$$\frac{12}{r} = 3\pi r^2,$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}08.$$

A magasság akkor $m \oplus 1{,}63$, így a felszín:

$$A = 18{,}39 \ \text{dm}^2 = 1839 \ \text{cm}^2.$$

572. Jelölje r az alapkör sugarának, m pedig a magasságnak a mérőszámát! A tengelymetszet egy $2r$, illetve m oldalhosszúságokkal bíró téglalap. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 m}{2\pi r\left(r+m\right)} = \frac{rm}{2\left(r+m\right)} = \frac{3}{4},$$

$$2rm = 24, \text{ ebből } rm = 12.$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{6}{r+m}=\frac{3}{4}\text{, ebből } r+m=8.$$

Mivel $m=8-r$; így $r(8-r)=12$, ebből $0=r^2-8r+12$, melynek megoldásai:

$$r=2\text{, illetve } r=6.$$

Két henger felel meg a feltételeknek:

$$r_1=2,\ m_1=6\text{, illetve } r_2=6,\ m_2=2.$$

a) Az alapkör sugarának mérőszámai: $r_1=2$ vagy $r_2=6$.

b) A magasság mérőszámai: $m_1=6$ vagy $m_2=2$.

573. Jelölje x az alapkör sugarát, m pedig a magasságot (dm-ben mérve)! A felszínt és a térfogatot felírva:

$$A=2\pi x(x+m)=2\pi\text{, ebből } x^2+xm=1,$$

$$V=\pi x^2 m.$$

Mivel

$$m=\frac{1-x^2}{x},$$

ezért

$$V=\pi x\left(1-x^2\right).$$

Ez pontosan akkor maximális, ha

$$f(x)=x\left(1-x^2\right)$$

maximális, ahol $0<x<1$.

Differenciálva:

$$f'(x)=1-3x^2,$$

$$f''(x)=-6x.$$

Innen leolvasható, hogy az adott értelmezési tartományon

$$f'(x)=0\text{, ebből } x=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0;$$

azaz f-nek maximuma az $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,58$ helyen van és máshol nincs.

A maximumot adó körhenger magassága $m=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1,15$.

A maximális térfogat:

$$V_{\max}=\pi\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx 1,2\ \text{dm}^3.$$

Megjegyzés:

A maximum meghatározható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével is.

574. Jelölje x az alapkör sugarát, m pedig a magasságot (dm-ben mérve)! A felszínt és a térfogatot felírva:

$$A = 2\pi x(x+m),$$

$$V = \pi x^2 m = \pi, \text{ ebből } m = \frac{1}{x^2}.$$

Innen

$$A = 2\pi\left(x^2 + \frac{1}{x}\right),$$

ami pontosan akkor lesz minimális, ha

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

minimális, ahol $x > 0$.
Differenciálva:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2},$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}.$$

Innen adódik, hogy

$$f'(x) = 0, \text{ ebből } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0.$$

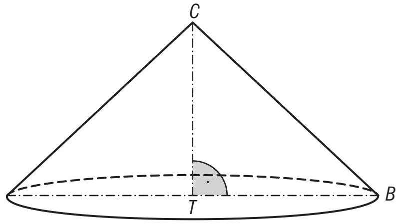
Ez azt mutatja, hogy f-nek minimuma az $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79$ helyen van és máshol nincs.

A minimumot adó forgáshenger magassága $m = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$.
A minimális felszín:

$$A_{\min} = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right) \approx 11,87 \text{ dm}^2.$$

Megjegyzés:
A minimum meghatározható a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével is.

575. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) Pitagorasz tételét alkalmazva a BCT derékszögű háromszögre:

$$BC=\sqrt{CT^2+TB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{ km}.$$

b) A forgáskúp térfogatképletét alkalmazva:

$$V=\frac{\pi r^2 m}{3}=\frac{\pi\cdot 4^2\cdot 3}{3}\approx 50,27\text{ km}^3.$$

c) A kúp alkotója a fentiek miatt $a=5$ km, így a palást:

$$P=\pi r a\approx 62,83\text{ km}^2.$$

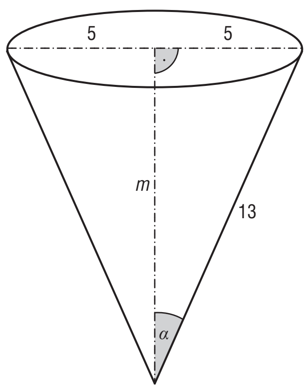
576. a) Ha r az alapkör sugara méterben mérve, akkor

$$12\pi=2\pi r,\text{ ebből } r=6\text{ m},$$

$$V=\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 6}{3}\approx 226{,}19\text{ m}^3.$$

b) Mivel $m=r$; így a hajlásszög 45°.

577. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) Az ábra alapján a kúp α fél nyílásszögére:

$$\sin\alpha=\frac{5}{13},\text{ ebből } \alpha\approx 22,62°,$$

így a nyílásszög 45,24°.

b) Pitagorasz tétele miatt:

$$m=\sqrt{13^2-5^2}=12 \text{ cm},$$

így a térfogata

$$V=\frac{\pi\cdot 5^2\cdot 12}{3}\approx 314{,}16 \text{ cm}^3.$$

c) Behelyettesítve:

$$P=\pi\cdot 5\cdot 13\approx 204{,}2 \text{ cm}^2.$$

578. A félkör sugara a kúp alkotója: $a=18$ cm. A félkörív hossza az alapkör kerületével egyezik meg, így az alapkör r sugarára:

$$2\pi r=18\pi,\text{ ebből } r=9 \text{ cm}.$$

A kúp magasságát Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg:

$$m=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{18^2-9^2}\approx 15{,}59 \text{ cm}.$$

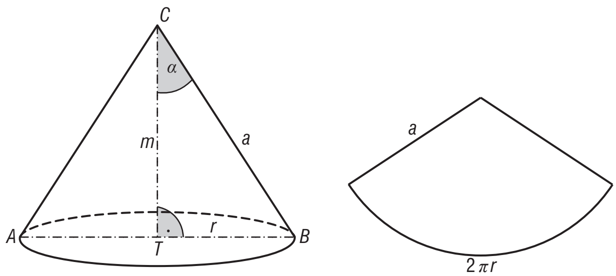
a) A térfogat:

$$V=\frac{\pi r^2 m}{3}\approx 1322{,}4 \text{ cm}^3.$$

b) A felszín:

$$A=\pi r\left(r+a\right)\approx 695{,}27 \text{ cm}^2.$$

579. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A körcikk sugara a kúp alkotója: $a=12$ cm. A körív hossza az alapkör kerületével egyezik meg, így az alapkör r sugarára:

$$2\pi r=\frac{12\cdot 2\pi}{3},\text{ ebből } r=4 \text{ cm}.$$

(Felhasználtuk, hogy a körív hossza és a hozzá tartozó körcikk nagysága egyenesen arányos.)

A kúp magasságát Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg:

$$m=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{12^2-4^2}\approx 11{,}31 \text{ cm}.$$

a) A térfogat:

$$V=\frac{\pi r^2 m}{3}\approx 189{,}5 \text{ cm}^3.$$

b) A fél nyílásszögre:

$$\sin\alpha = \frac{r}{a} = \frac{1}{3}, \text{ ebből } \alpha \approx 19,47°,$$

így a nyílásszög: $2\alpha = 38,94°$.

580. A negyedkör sugara a kúp alkotója, ezért

$$\frac{\pi a^2}{4} = 201, \text{ ebből } a \approx 16 \text{ cm}.$$

A negyed körív hossza az alapkör kerülete, ezért

$$2\pi r = \frac{2 \cdot 16\pi}{4}, \text{ ebből } r = 4 \text{ cm}.$$

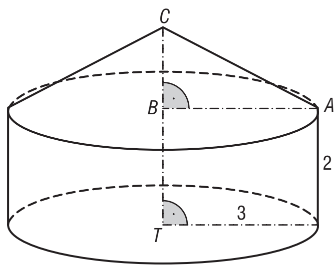
A kúp magasságát Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg:

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} \approx 15,49 \text{ cm}.$$

A térfogat:

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3} \approx 259,53 \text{ cm}^3 \approx 2,6 \text{ dl}.$$

581. a) Tekintsük az alábbi ábrát!



b) A jurta térfogata a forgáshenger és a forgáskúp térfogatának összege. A forgáshenger térfogatképletét alkalmazva és felhasználva, hogy magassága $BT = 2$ m:

$$V_{\text{henger}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 \approx 56,55 \text{ m}^3.$$

A forgáskúp térfogata, felhasználva, hogy magassága $BC = 3 - 2 = 1$ m:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 1}{3} \approx 9,42 \text{ m}^3.$$

A jurta térfogata:

$$V_{\text{jurta}} \approx 66 \text{ m}^3.$$

c) A jurta felszíne a forgáshenger és a forgáskúp palástjának területösszege. A forgáshenger palástja egy olyan téglalap területe, melynek oldalai közül ez egyik 2 m, a másik pedig az alapkör kerülete, ami 6π. Ezért:

$$P_{\text{henger}} = 12\pi \approx 37{,}7\ \text{m}^2.$$

A kúppalást meghatározásához ki kell számítanunk egy alkotó hosszát. Az ábrán lévő CBA derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt alkalmazva a CA alkotó:

$$CA = \sqrt{CB^2 + AB^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}\ \text{m},$$

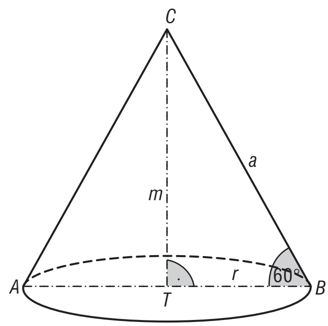
így a kúppalást:

$$P_{\text{kúp}} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \pi \approx 29{,}8\ \text{m}^2.$$

A jurta felszíne:

$$A_{\text{jurta}} \approx 67{,}5\ \text{m}^2.$$

582. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! Az ABC háromszög szabályos.



a) Mivel az ábra alapján

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{m}{r}, \text{ ebből } m = \sqrt{3}r,$$

ezért

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3}, \text{ ebből } 49 = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{3}r}{3},$$

$$r \approx 3\ \text{m}.$$

Innen a magasság:

$$m = r\sqrt{3} \approx 5{,}2\ \text{m}.$$

b) Az alkotók hossza lesz a gerendák hossza. Pitagorasz tételéből:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r = 6\ \text{m}.$$

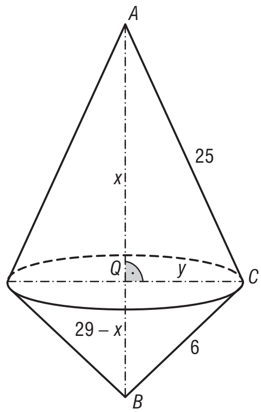
c) A tető felszíne:

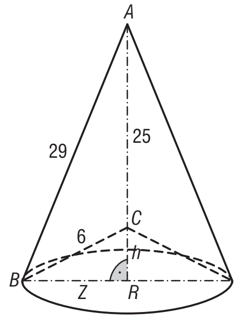
$$A = \pi r a \approx 61{,}2\ \text{m}^2.$$

583. A háromszög tompaszögű, ugyanis

$$29^2 > 6^2 + 25^2.$$

Az alábbi ábrák mutatják a két forgatás után kialakult forgástesteket. Az első esetben két, közös alaplapra támaszkodó forgáskúp alkotja a testet. A második esetben a test úgy keletkezik, hogy a közös alapra támaszkodó két kúp közül a nagyobbikból elhagyjuk a kisebbiket. Az y az AB oldalhoz, a z pedig az AC oldalhoz tartozó magasságokat jelöli, ezek lesznek az alapkörök sugarai.





A forgáskúp térfogatképletét alkalmazva az első esetben a test térfogata:

$$V_1 = \frac{\pi y^2 x}{3} + \frac{\pi y^2 (29 - x)}{3} = \frac{\pi y^2 \cdot 29}{3}.$$

A második esetben:

$$V_2 = \frac{\pi z^2 (25 + h)}{3} - \frac{\pi z^2 h}{3} = \frac{\pi z^2 \cdot 25}{3}.$$

Alkalmazzuk az ún. Heron-képletet az ABC háromszög területének kiszámítására! Mivel a háromszög kerületének fele 30 cm, ezért

$$t = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = 60 \ \text{cm}^2.$$

A területképletet alkalmazva:

$$60 = \frac{29 \cdot y}{2}, \text{ ebből } y = \frac{120}{29},$$

$$60 = \frac{25 \cdot z}{2}, \text{ ebből } z = \frac{120}{25}.$$

a) A keresett arány:

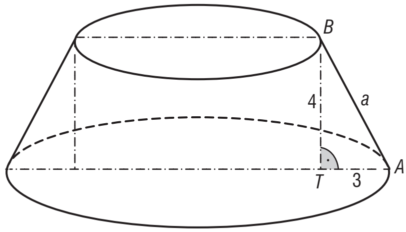
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{y^2 \cdot 29}{z^2 \cdot 25} = \left(\frac{25}{29}\right)^2 \cdot \frac{29}{25} = \frac{25}{29},$$

ami racionális szám.

b) A testek térfogata:

$$V_1 \approx 520 \ \text{cm}^3 \text{ és } V_2 \approx 603{,}19 \ \text{cm}^3.$$

584. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A csonka kúp tengelymetszete szimmetrikus trapéz. Az ABT derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét:

$$a^2 = 3^2 + 4^2, \text{ ebből } a = 5 \text{ cm.}$$

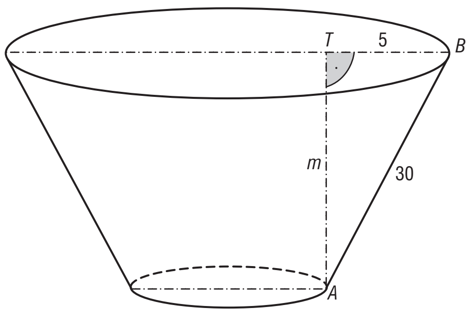
a) A csonka kúp térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot \left(9^2 + 6^2 + 9 \cdot 6\right) \approx 716{,}28 \ \ \text{cm}^3.$$

b) A felszín képletéből:

$$A = \pi \left[9^2 + 6^2 + (9+6) \cdot 5\right] \approx 603{,}18 \ \ \text{cm}^2.$$

585. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Pitagorasz tétele miatt:

$$m = \sqrt{30^2 - 5^2} \approx 29{,}58 \text{ cm.}$$

A csonka kúp térfogatképletét alkalmazva:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 29{,}58 \cdot \left(10^2 + 5^2 + 10 \cdot 5\right) \approx 5420{,}82 \ \ \text{cm}^3 > 5000 \ \text{cm}^3 = 5 \text{ liter.}$$

A víz tehát belefér a vödörbe.

586. A forgáshenger tengelymetszete egy olyan téglalap, melynek egy csúcsból induló oldalai 10 cm és 24 cm hosszúak, ezért átlójának hossza Pitagorasz tétele miatt:

$$\sqrt{10^2 + 24^2} = 26 \text{ cm.}$$

A köré írt gömbből a metsző sík egy főkört metsz ki, amely a téglalap köré írt köre, sugara megegyezik a henger köré írt gömb sugarával. Mivel a kör középpontja a téglalap átlóinak metszéspontja, így a henger köré írt gömb sugara 13 cm.

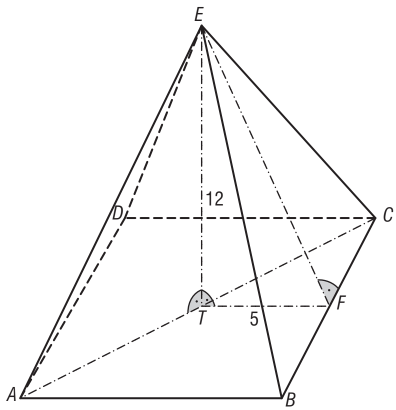
587. A golyó térfogata:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3}.$$

Ez m magasságú henger alakú részt foglal el, ezért

$$\pi \cdot 5^2 \cdot m = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3}, \text{ ebből } m = 1{,}44 \text{ cm.}$$

588. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Ismeretes, hogy ha egy konvex poliédernek van beírt gömbje, akkor annak r sugarára:

$$V = \frac{A \cdot r}{3}, \text{ ebből } r = \frac{3V}{A};$$

ahol A a poliéder felszíne, V pedig a térfogata.

a) Az oldallap magassága a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EF = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm.}$$

A felszín:

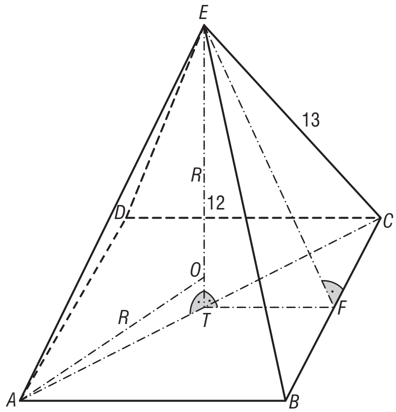
$$A = 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 13}{2} = 360 \text{ cm}^2.$$

b) A térfogat:

$$V = \frac{10^2 \cdot 12}{3} = 400 \text{ cm}^3.$$

c) A beírt gömb sugara: $r = \dfrac{3V}{A} = 3{,}33$ cm.

589. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



a) A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ETC háromszögre:

$$TC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}.$$

Az alapterület:

$$t = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

A térfogat:

$$V = \frac{50 \cdot 12}{3} = 200 \text{ cm}^3.$$

b) Mivel

$$TC = FC\sqrt{2}, \text{ ebből } FC = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

így az EFC derékszögű háromszögből:

$$EF = \sqrt{13^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 12{,}51 \text{ cm},$$

ami az oldallap magassága.

A felszín:

$$A = t + P = 50 + 4 \cdot \frac{5\sqrt{2} \cdot 12{,}51}{2} \approx 226{,}92 \text{ cm}^2.$$

A beírt gömb sugara:

$$r = \frac{3V}{A} = \frac{3 \cdot 200}{226{,}92} \approx 2{,}64 \text{ cm}.$$

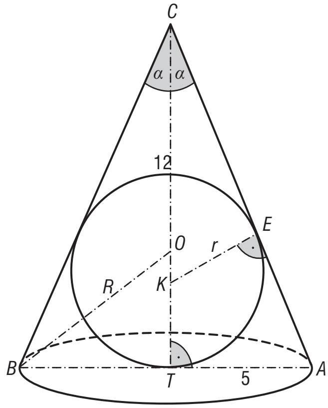
c) Az OTA háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$R^2 = (12 - R)^2 + 5^2,$$

$$R^2 = 144 - 24R + R^2 + 25,$$

$$R \approx 7{,}04 \text{ cm}.$$

590. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



Az ábrán K jelöli a beírt gömb középpontját, O pedig a köré írt gömb középpontját. Legyen r, illetve R a gömbök sugara. Az ABC háromszög a kúp tengelymetszete. A Pitagorasz-tétel miatt:

$$AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$

a) Az ACT és KEC háromszögek hasonlók, hiszen szögeik egyenlők, így a megfelelő oldalak hosszának arányára:

$$\frac{r}{5} = \frac{12-r}{13}, \text{ ebből } r = 3{,}33 \text{ cm}.$$

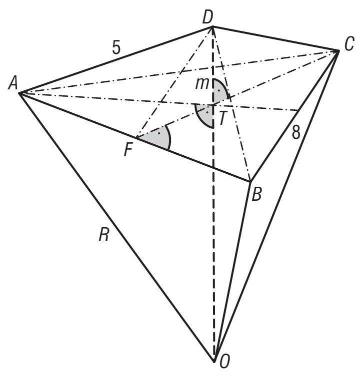
b) Az OTB derékszögű háromszög miatt:

$$R^2 = 5^2 + (12-R)^2,$$

$$R^2 = 25 + 144 - 24R + R^2,$$

$$R = 7{,}04 \text{ cm}.$$

591. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A gúla magasságának T talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja. Mivel a szabályos háromszög súlyvonala egyben magasság is, továbbá a súlypont a súlyvonalakat $2:1$ arányban osztja, ezért

$$AT = TC = \frac{2}{3}TF = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8 = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

(Felhasználtuk, hogy a szabályos háromszög magassága az oldal hosszának $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szerese.)

A gúla m magassága az ATD derékszögű háromszögből:

$$m = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

A köré írt gömb középpontja a gúla DT magasság egyenesén lévő O pont, sugara R. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az ATO derékszögű háromszögre:

$$R^2 = AT^2 + TO^2 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(R - \frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2!$$

Innen

$$R^2 = 21{,}33 + R^2 - 3{,}83R + 3{,}66, \text{ ebből } R = 6{,}52 \text{ cm.}$$

592. A tengelymetszet egy körbe írt téglalap, melynek átlója 2 egység. Ha x a henger alapkörének sugara és y a magassága, akkor így $4x^2 + y^2 = 4$.

A térfogat:

$$V = \pi x^2 y.$$

Ez pontosan akkor maximális, amikor a négyzete, így elegendő az

$$x^4 y^2 = x^4\left(4 - 4x^2\right) = 4x^4\left(1 - x^2\right)$$

kifejezés maximumával foglalkozni. Vezessük be az $x^2 = t$ helyettesítést! Az alábbi függvény maximumát kell megkeresnünk:

$$f(t) = -t^3 + t^2, \text{ ahol } 0 < t < 1!$$

Differenciálva:

$$f'(t) = -3t^2 + 2t,$$

$$f''(t) = -6t + 2.$$

Mivel

$$f'(t) = 0, \text{ ebből } t(2 - 3t) = 0;$$

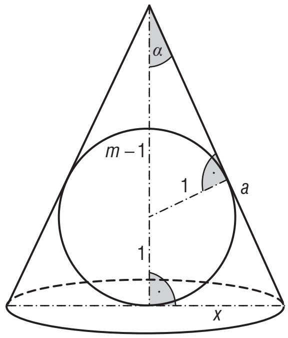
ahonnan $t = \frac{2}{3}$, hiszen t pozitív. Tekintettel arra, hogy

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -2 < 0,$$

kimondhatjuk, hogy az f függvénynek maximuma van a $t=\frac{2}{3}$ helyen (és máshol nincs). Innen

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ és } y=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

593. a) és b) Használjuk az alábbi ábra jelöléseit!



A tengelymetszeten m a kúp magassága, x az alapkör sugara, a a kúp alkotója és α a nyílásszög fele. Az ábrán lévő hasonló háromszögek miatt:

$$\sin\alpha=\frac{x}{a}=\frac{1}{m-1}, \text{ ebből } x(m-1)=a.$$

A forgáskúp felszín, illetve térfogatképletének felhasználásával:

$$\frac{3V}{A}=\frac{\pi x^2 m}{\pi x(a+x)}=\frac{xm}{a+x}=\frac{\frac{x}{a}\cdot m}{1+\frac{x}{a}}=\frac{\frac{m}{m-1}}{1+\frac{1}{m-1}}=1.$$

Ebből azonnal következik, hogy a felszín és a térfogat ugyanarra a kúpra lesz minimális, így csak a térfogatra végzünk számításokat. Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$a^2=x^2+m^2,$$

$$x^2(m-1)^2=x^2+m^2,$$

$$x^2\left[(m-1)^2-1\right]=m^2,$$

$$x^2=\frac{m}{m-2}.$$

Behelyettesítve a térfogatképletbe:

$$\frac{\pi}{3}x^2m=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{m^2}{m-2}.$$

Mivel

$$\frac{m^2}{m-2}=\frac{(m-2)(m+2)+4}{m-2}=4+m-2+\frac{4}{m-2}\geq 4+2\cdot\sqrt{(m-2)\frac{4}{m-2}}=8$$

a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt, így a térfogat minimális pontosan akkor lesz, ha

$$m-2=2, \text{ ebből } m=4.$$

Ekkor lesz a fentiek szerint a felszín is minimális, a nyílásszögre pedig:

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}, \text{ ebből } 2\alpha\approx 38{,}94°.$$

594. Jelölje az egy csúcsból induló élek hosszát a, b és c! Tudjuk, hogy a testátló hossza a köré írt gömb sugarának kétszerese, ezért:

$$a^2+b^2+c^2=4.$$

a) A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\frac{4}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{V^2},$$

$$\frac{64}{27}\geq V^2,$$

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\geq V.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$a^2=b^2=c^2=\frac{4}{3}, \text{ ebből } a=b=c=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

azaz a téglatest kocka.

b) Mivel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint pl.

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab,$$

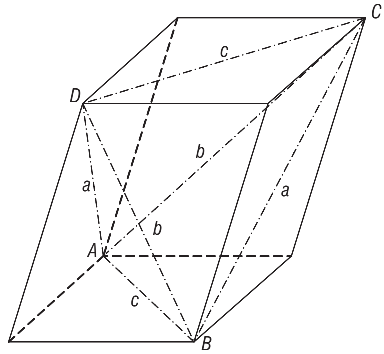
ezért

$$4=a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=\frac{A}{2},$$

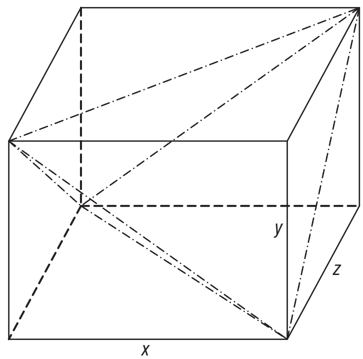
$$8\geq A.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$, azaz a téglatest kocka.

595. a) Tekintsük a tetraéder ún. bennfoglaló paralelepipedonját! Mivel a lapok nem egyenlő szárú háromszögek és egybevágók, ezért a tetraéder szemközti élei egyenlők! Ebből azonnal adódik, hogy a bennfoglaló paralelepipedon szemközti lapjai olyan egybevágó paralelogrammák, melyeknek átlói egyenlők, következésképpen téglalapok, a bennfoglaló paralelepipedon pedig téglatest.



A feladatban szereplő tetraéder térfogatát ezért kiszámíthatjuk oly módon, hogy a téglatest térfogatából levonjuk annak a 4 derékszögű tetraédernek a térfogatát, amely a téglatest tetraéderrel nem közös csúcsainál keletkezik.



Ha a téglatest egy csúcsból induló élei x, y és z, akkor a lapátlókra felírva Pitagorasz tételét:

$$\begin{cases} x^2+y^2=14^2=196, \\ y^2+z^2=13^2=169, \\ z^2+x^2=15^2=225. \end{cases}$$

Összeadás után:

$$x^2+y^2+z^2=295,$$

ezért

$$x^2=126, \text{ ebből } x=\sqrt{126},$$
$$y^2=70, \text{ ebből } y=\sqrt{70},$$
$$z^2=99, \text{ ebből } z=\sqrt{99}.$$

Könnyű látni, hogy a derékszögű tetraéderek mindegyikének térfogata $\frac{xyz}{6}$, így az *ABCD* tetraéderé:

$$V = xyz - 4 \cdot \frac{xyz}{6} = \frac{xyz}{3} \approx 311{,}48 \text{ cm}^3.$$

Egy lap területét a Héron-képlet segítségével határozhatjuk meg. A kerület fele 21 cm, így

$$t = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

A felszín:

$$A = 4t = 336 \text{ cm}^2.$$

b) A beírt gömb sugara:

$$r = \frac{3V}{A} \approx 2{,}78 \text{ cm}.$$

8. Analízis – megoldások

8.1. Függvény határértéke, folytonossága, deriváltja

596. Felhasználva a határértékre vonatkozó alapvető tételeket adódik,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{0}{2+0}=0.$$

597. Felhasználva a határértékre vonatkozó alapvető tételeket adódik,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{5+\frac{6}{x}}=\frac{4-0}{5+0}=\frac{4}{5}.$$

598. Felhasználva a határértékre vonatkozó alapvető tételeket és cos x korlátosságát adódik,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{3x^3+\cos x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^3}}{3+\frac{\cos x}{x^3}}=\frac{1-0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

599. Felhasználva a határértékre vonatkozó alapvető tételeket és $\sin 3x$ függvény korlátosságát, az adódik,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-3}{3x^2+\sin 3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{\sin 3x}{x^2}}=-\infty.$$

Tehát nincs határérték.

600. Felhasználva a határértékre vonatkozó alapvető tételeket ezt kapjuk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7x+1}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2}=\frac{\sqrt{1-0+0}}{2}=\frac{1}{2}.$$

601. Szorzattá alakítva a számlálót, egyszerűsítés után:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{1-x}=\lim_{x\to 1}(-x-2)=-3.$$

602. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{(x-4)\cdot(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{8}.$

603. Szorzattá alakítva a számlálót, egyszerűsítés után:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x}+3\right)}{3-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 9}-\left(\sqrt{x}+3\right)=-6.$$

604. Felhasználva a nevezetes határértéket, miszerint $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{3x}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

605. Felhasználva a nevezetes határértéket, miszerint $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$; és azt, hogy a koszinusz függvény nullában felvett értéke 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

606. Bővítés után, az addíciós összefüggések és $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ felhasználásával:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2\cdot(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}4\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos 2x)}=4\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=2.$$

607. A függvény értelmezett az $x=3$ pontban, értéke $f(3)=4$; a határértéke azonban:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6;$$

azaz a függvény nem folytonos az adott pontban.

608. A függvény értelmezett az $x = 4$ pontban, értéke –48, a bal oldali határértéke nyilván szintén –48. A jobb oldali határértéke:

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{x^3-64}{4-x}=\lim_{x\to 4+0}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{4-x}=\lim_{x\to 4+0}-\left(x^2+4x+16\right)=-48.$$

Tehát a függvény folytonos az adott pontban.

609. Az $x = 0$ pontban a függvény jobb és bal oldali határértéke:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$$

Mivel ezek különböznek, ezért nem folytonos a függvény az adott pontban.

610. A függvény definíciója alapján csak az $x = -1$ pontban lehet szakadási helye. Akkor lesz itt is folytonos, ha a függvény bal és jobb oldali határértékei ebben a pontban egyenlőek a helyettesítési értékkel (azaz ha a két része a grafikonnak „jól csatlakozik").

Ez pontosan akkor áll fenn, ha

$$p\cdot(-1)+5=(-1)^3-2\cdot(-1)+2,\ \text{ebből}\ p=2.$$

611. A differenciahányados függvény:

$$g(x)=\frac{x^3-2^3}{x-2},\ \text{ahol}\ x\neq 2.$$

Azaz

$$g(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4,\ x\neq 2.$$

A differenciálhányados értéke pedig ennek a függvénynek az $x_0 = 2$ pontbeli határértéke, ami nyilván:

$$2^2+2\cdot 2+4=12.$$

612. A differenciahányados függvény:

$$g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{x^4-1^4}{x-1}.$$

Azaz

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=(x+1)(x^2+1),\ x\neq 1.$$

A differenciálhányados értéke pedig ennek a függvénynek az $x_0 = 1$ pontban vett határértéke, ami nyilván:

$$(1+1)(1+1)=4.$$

613. A differenciahányados függvény az $x_0 = 3$ pontban:

$$g:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{x^3+2x-(3^3+2\cdot 3)}{x-3}.$$

Azaz

$$g(x)=\frac{x^3+2x-33}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+3x+11)}{x-3}=x^2+3x+11,\ x\neq 3.$$

A differenciálhányados értéke pedig ennek a függvénynek az $x_0 = 3$ pontban vett határértéke, ami nyilván:

$$3^2+3\cdot 3+11=29.$$

614. A differenciahányados függvény:

$$g:\mathbb{R}\setminus\{\pi\}\ \to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}.$$

Azaz

$$g(x)=\frac{\sin x}{x-\pi}=\frac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi};$$

mely utóbbi alak a differenciálhányados kiszámításához hasznos, mivel

$$\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1;$$

ahol felhasználjuk az ismert nevezetes határértéket:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Azaz a pontbeli differenciálhányados értéke –1.

615. Meg kell vizsgálnunk, hogy létezik-e az alábbi határérték:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|1-x|-|1-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|1-x|}{x-1}.$$

A határérték nem létezik, mivel a fenti differenciahányados-függvény jobb oldali határértéke 1, míg a bal oldali határértéke –1. Azaz a függvény az adott pontban nem differenciálható.

616. A differenciálhatóság szemléletes jelentése az, hogy a függvény grafikonja az adott pontban nem „csúcsos”, azaz „sima”. Így olyan grafikonú függvényt keresünk, amelynek grafikonja az értelmezési tartomány három pontjában „csúcsos”, másutt mindenütt sima.

Ilyen függvény például:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\big||x|-2\big|.$$

A függvény éppen az $x_0 = -2$; 0 és 2 értékek esetén nem differenciálható.

617. Felhasználva az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = 4 \cdot 3x^3 + (\cos 2x) \cdot 2 = 12x^3 + 2\cos 2x.$$

618. Felhasználva a függvények szorzatának deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

619. Felhasználva a függvények hányadosának deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \left(x^2+1\right) - 2x \cdot \sin x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

620. Felhasználva az összetett függvény deriválására, illetve a függvények szorzatának deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = (15x^2) \cdot \operatorname{tg} 3x + (5x^3 - 2) \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3.$$

621. Felhasználva az összetett függvény deriválására, illetve a függvények összegének deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = -3\sin 3x - \cos x.$$

622. Felhasználva az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt:
$$f'(x) = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4\sin 2x \cos 2x = 2\sin 4x.$$

623. Írjuk át más alakba a függvény hozzárendelési szabályát:
$$f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \frac{x^2+3}{2x^5}} = \left(\operatorname{ctg} \frac{x^2+3}{2x^5}\right)^{\frac{1}{5}}!$$

Többször felhasználva az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt és a többi deriválási szabályt:
$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{x^2+3}{2x^5}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \dfrac{x^2+3}{2x^5}}\right) \cdot \left(\frac{2x \cdot 2x^5 - (x^2+3) \cdot (10x^4)}{4x^{10}}\right).$$

624. Az érintő meredeksége a pontbeli differenciálhányados értéke:
$$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} - \pi\right) = 3.$$

Így az érintő egyenes egyenlete:
$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ azaz } y = 3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

625. Mivel

$$f'(x) = 2x - 1;$$

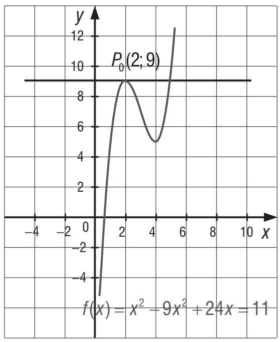
így az érintő meredeksége a P (1;0) pontban: $m = f'(1) = 1$. Az érintőegyenes egyenlete ezért, felhasználva a koordináta-geometriából ismert $y - y_0 = m(x - x_0)$ összefüggést:

$$y = x - 1.$$

626.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24,$$
$$f'(2) = 0.$$

Ebből következően a vizsgált érintő meredeksége 0, azaz az érintő párhuzamos az x tengellyel, így nem zár közre háromszöget a koordinátatengelyekkel.



627.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4,$$
$$f'(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right),$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}.$$

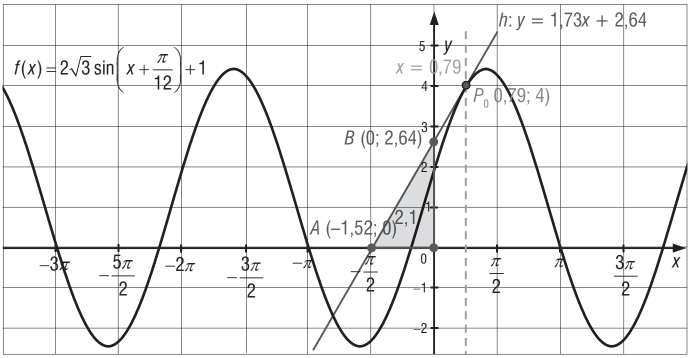
Ebből következően a vizsgált érintő egyenlete:

$$y - 4 = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Az érintő x tengellyel való metszéspontjának első koordinátája: $\frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx -1{,}52.$

Az érintő y tengellyel való metszéspontjának második koordinátája: $4-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}\approx 2{,}64.$

Ekkor a keresett háromszög területe közelítőleg 2,01 területegység.



628.

$$f(4)=6,\ f(-2)=3,$$

$$f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+x+1,$$

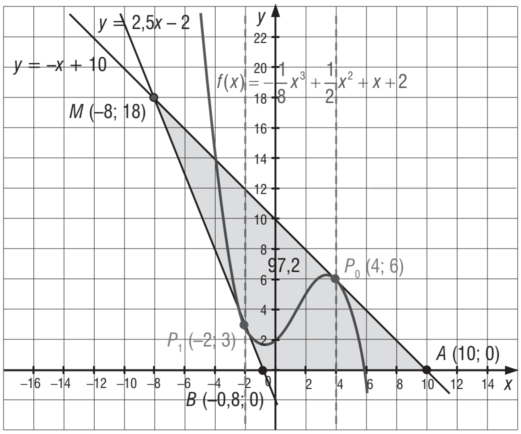
$$f'(4)=-1,\ f'(-2)=-\frac{5}{2}.$$

Ebből következően a vizsgált érintők:

$$e_1: y-6=-(x-4),$$

$$e_2: y-3=-\frac{5}{2}(x+2).$$

E két egyenes metszéspontja az egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásával kapható: $M(-8;18)$. Az érintők x tengellyel való metszéspontjának abszcisszái: 10 és –0,8. A vizsgált háromszög területe: $\dfrac{10{,}8\cdot 18}{2}=97{,}2$ területegység.



629. Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény második deriváltja az adott pontban 0 legyen. Határozzuk meg a függvény második deriváltját! $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$; amiből: $f''(x) = 6x - 12$; ami pontosan egy helyen 0, méghozzá az $x_0 = 2$ pontban. Itt a második derivált előjelet is vált, azaz a $P\big(2, f(2)\big)$; (azaz a $P(2, -2)$) pont valóban inflexiós pont, az adott függvény esetén az egyetlen.

630. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a differenciálhányados értéke az adott helyen 0 legyen. Mivel

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2,$$

és az

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

a másodfokú egyenlet megoldásai $x = 1$, illetve $x = 2$, így csakis ezek lehetnek lokális szélsőérték helyek. Mivel $f''(x) = 2x - 3$; így $f''(1) = -1 < 0$; továbbá $f''(2) = 1 > 0$; ezért $f(x)$-nek az $x = 1$ helyen helyi maximuma, az $x = 2$ helyen pedig helyi minimuma van.

631. A henger felszíne:

$$A = 2r\pi \cdot (r + m) = 1200.$$

A magasságot kifejezhetjük az alapkör sugarával:

$$m = \frac{600}{r\pi} - r.$$

Ebből a térfogatot felírhatjuk r függvényeként:

$$V(r)=r^2\pi\cdot\left(\frac{600}{r\pi}-r\right);\ \text{ahol}\ r\in\left]0,\sqrt{\frac{600}{\pi}}\right[.$$

Ennek keressük a maximumát. Ehhez kiszámítjuk a derivált zérushelyeit:

$$V(r)=r^2\pi\cdot\left(\frac{600}{r\pi}-r\right)=600r-r^3\pi,$$

$$V'(r)=600-3\pi r^2=0,$$

$$r=\pm\sqrt{\frac{200}{\pi}}\approx\pm7{,}98;$$

ahol csak a pozitív értéknek van geometriai jelentése. Ekkor $(r=7{,}98\ \text{cm})$ a függvénynek maximuma van, mivel a derivált előjele az adott helyen pozitívról változik negatívra. Ekkor a henger magassága:

$$m=\frac{600}{r\pi}-r=15{,}95\ \text{cm}.$$

632. A kúp térfogata:

$$V=\frac{r^2\pi m}{3}=200\ \text{dm}^3;$$

ebből a kúp magassága kifejezhető az alapkör sugarával $m=\frac{600}{r^2\pi}$, amiből a felhasználandó fém (ami a kúp palástja) területe: $P=r\pi a$; ahol az alkotó: $a=\sqrt{r^2+m^2}$. Azaz

$$P=\pi r\sqrt{r^2+m^2}=\pi r\sqrt{r^2+\left(\frac{600}{r^2\pi}\right)^2}=\pi\sqrt{r^4+\frac{360000}{r^2\pi}};$$

ahol r pozitív valós szám. Ennek keressük a minimumát. Ehhez kiszámítjuk a derivált zérushelyeit:

$$P'(r)=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(r^4+\frac{360000}{r^2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4r^3+(-2)\cdot\frac{360000}{\pi r^3}\right);$$

ami csak akkor lehet 0, ha

$$\left(4r^3+(-2)\cdot\frac{360000}{\pi r^3}\right)=0,\ \text{ebből}\ r=\pm6{,}21;$$

ahol nyilván csak a pozitív érték bír geometriai jelentéssel, amely érték esetén a $P(r)$ függvénynek minimuma van, mivel a derivált előjele itt negatívról pozitívra vált. Azaz az optimális megoldáshoz az alapkör sugarát 6,21 dm-nek kell választanunk.

633. A téglalap fallal párhuzamos oldalának hosszát jelölje x! Így a falra merőleges oldal hossza $y=\frac{15}{x}$. Azaz a felhasználandó drót hossza

$$l(x)=x+2y=x+\frac{30}{x},$$

ahol x pozitív valós szám. Ennek a függvénynek keressük a minimumát:

$$l'(x)=1-\frac{30}{x^2}=0,\text{ ebből } x=\pm\sqrt{30};$$

nyilván csak a pozitív érték bír geometriai jelentéssel, azaz $x=\sqrt{30}\approx 5,48$; mely érték esetén a derivált előjele negatívról pozitívra vált, azaz a függvénynek minimuma van. Tehát a téglalap fallal párhuzamos oldalának hosszát $x=5,48$ m, a falra merőleges oldal hosszát $y=\frac{15}{x}=2,74$ m hosszúra kell választanunk.

634. Jelölje a medence szélességét x, hosszát y! A csempézendő felület nagysága

$$T=xy+(1,1\cdot x+1,1\cdot y)\cdot 2=30,$$

amiből y-t kifejezhetjük:

$$y=\frac{30-2,2x}{x+2,2}.$$

A medence térfogata pedig:

$$V=x\cdot y\cdot 1,1=1,1\cdot\frac{30x-2,2x^2}{x+2,2},$$

ahol

$$x\in\left]0,\frac{30}{2,2}\right[.$$

Ennek keressük a maximumát, számítsuk ki a derivált zérushelyeit!

$$V'(x)=1,1\cdot\frac{(30-4,4x)\cdot(x+2,2)-\left(30x-2,2x^2\right)}{(x+2,2)^2}=0,$$

$$(30-4,4x)\cdot(x+2,2)-\left(30x-2,2x^2\right)=0,$$

$$2,2x^2+9,68x-66=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai pedig:

$$x_1=3,7 \text{ és } x_2=-8,1,$$

melyek közül nyilván csak az első bír geometriai jelentéssel. $x_1=3,7$ esetén a függvény deriváltja előjelet vált, pozitívról negatívra, azaz itt a függvénynek maximuma van. Ekkor $y=3,7$; azaz a medence alapja négyzet.

A medence szélességét és hosszát egyaránt 3,7 méteresnek kell választani.

635. A tölcsér alkotója a körlemez sugara, azaz $a = 17$; így az alapkör sugarára és a kúp magasságára igaz:

$$\sqrt{r^2 + m^2} = 17.$$

A tölcsér térfogata:

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(289 - m^2\right) \cdot m, \text{ ahol } m \in \left]0,17\right[.$$

A függvény maximumát keressük, ehhez számítsuk ki a derivált zérushelyeit!

$$V'(m) = \frac{\pi}{3} \cdot (289 - 3m^2) = 0, \text{ ebből } m = \pm\sqrt{\frac{289}{3}},$$

ahol csak a pozitív érték bír geometriai jelentéssel, azaz

$$m = \sqrt{\frac{289}{3}} \approx 9{,}81 \text{ cm},$$

ekkor a függvénynek maximuma van, ugyanis a derivált előjele itt pozitívból negatívba vált. Ekkor $r = \sqrt{289 - m^2} = 13{,}88$ cm; azaz a lehetséges maximális térfogat:

$$V = \frac{\pi \cdot 13{,}88^2 \cdot 9{,}81}{3} = 1979{,}1 \text{ cm}^3\text{; azaz } 1{,}9791 \text{ liter.}$$

636. A hengeres rész térfogatát kell maximalizálnunk, azaz a $V = \pi r^2 m$ függvény maximumát keressük a következő feltétel mellett:

$$0{,}8 \cdot 2r\pi m = 7000.$$

A feltételből kifejezzük m-et:

$$m = \frac{7000}{1{,}6\pi} \cdot \frac{1}{r}; \text{ ahol } (0 < r \leq 30).$$

Így

$$V = \pi r^2 m = \frac{7000}{1{,}6} \cdot r.$$

Ennek a maximumát keressük a $0 < r \leq 30$ intervallumon. A maximum az elsőfokú függvény monotonítása miatt az $r = 30$ cm esetén lesz. Azaz a kör sugara 30 cm, a magassága pedig:

$$m = \frac{7000}{1{,}6\pi} \cdot \frac{1}{30} = 46{,}4 \text{ cm}.$$

637. A henger alapkörének sugarát jelölje r! Ekkor a henger magassága

$$m = 2 \cdot \sqrt{100 - r^2},$$

a henger térfogata pedig:

$$V = \pi r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - r^2} = 2\pi \cdot \sqrt{100r^4 - r^6},$$

ahol $r \in \left]0,10\right[$. Ennek a függvénynek keressük a maximumát, amihez meghatározzuk a derivált zérushelyeit:

$$V'(r)=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{100r^4-r^6}}\cdot\left(400r^3-6r^5\right)=0,\text{ ebből } r=\pm\sqrt{\frac{400}{6}}\approx\pm 8{,}16,$$

amelyek közül nyilván csak a pozitívnak van geometriai jelentése, és mely esetben a derivált előjele pozitívról negatívra vált, azaz a térfogat maximális. Ekkor a henger magassága:

$$m=2\cdot\sqrt{100-r^2}=11{,}55\text{ cm}.$$

638. A cég bevételét a következő függvény írja le:

$$f(x)=(6500-x\cdot 100)\cdot(13000+x\cdot 250),$$

ahol x azt mutatja meg, hogy hányszor 100 forintot engedtek a kiindulási árból $(0\le x<65$ és $x\in\mathbb{Z})$. Ennek a függvénynek keressük a maximumát, amihez meghatározzuk a derivált zérushelyét:

$$f(x)=84\,500\,000+325\,000x-25\,000x^2,\text{ ebből } f'(x)=325\,000-50\,000x;$$

így a derivált zérushelye: $x=6{,}5$; ahol a derivált előjele pozitívról negatívra változik, azaz a függvénynek helyi maximuma van. Vizsgálandó még az $x=0$ eset, amikor $f(0)=6500\cdot 13\,000$; ami kisebb, mint az $f(6{,}5)=5850\cdot 14\,625$ érték. Így az optimális ár $6500-6{,}5\cdot 100=5850$ forint.

639. A vödörhöz felhasznált anyag felszíne:

$$A=r^2\pi+2\pi rm=r\pi\cdot(r+2m)=40.$$

Így a magasság kifejezhető a sugár segítségével:

$$m=\frac{\frac{40}{\pi r}-r}{2}.$$

Ebből a vödör térfogata:

$$V=r^2\pi\cdot\frac{\frac{40}{\pi r}-r}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{40}{\pi}r-r^3\right),$$

aminek a maximumát keressük az $r\in\left]0,\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right[$ intervallumon. Deriválás után:

$$V'(r)=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{40}{\pi}-3r^2\right)=0,\text{ ebből } r=\pm\sqrt{\frac{40}{3\pi}}\approx\pm 2{,}06\text{ dm}.$$

Nyilván csak a pozitív érték bír geometriai jelentéssel, amikor a derivált előjele pozitívról negatívra vált, azaz a térfogat maximális. Ekkor a vödör magassága:

$$m=\frac{\frac{40}{\pi r}-r}{2}=2{,}06\text{ dm},$$

az alapkör átmérője pedig: $2r=4{,}12$ dm.

8.2. Integrálszámítás

640. A határozatlan integrálra vonatkozó alapvető összefüggések alapján:

$$\int (2x-7)\,dx = x^2 - 7x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

641. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat:

$$\int (2x^2 - 5x + 1)\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\frac{x^2}{2} + x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

642. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat:

$$\int \left(\frac{3x^5 - 7x^3}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{x^6}{6} - 7\cdot\frac{x^4}{4}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

643. $\int \left(\sqrt{x\cdot\sqrt[5]{x^3}}\right) dx = \int \left(\left(x\cdot x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{4}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} + c = \frac{5}{9}\cdot\sqrt[5]{x^9} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

644. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat, alapintegrálokat:

$$\int \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \sin 2x\right) dx = \int \left(3\cdot x^{-1} - 5\cdot x^{-2} + \sin 2x\right) dx = 3\ln x - 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{-\cos 2x}{2} + c =$$

$$= 3\ln x + \frac{5}{x} - \frac{\cos 2x}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

645. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat, alapintegrálokat továbbá, hogy $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$:

$$\int \frac{\sqrt{x^3} + 27}{\sqrt{x} + 3}\,dx = \int \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 9\right) dx = \int \left(x - 3\cdot x^{\frac{1}{2}} + 9\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 9x + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^3} + 9x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

646. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat, alapintegrálokat, és hogy $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$:

$$\int \frac{\cos 4x}{\sin 2x - \cos 2x}\,dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin 2x - \cos 2x}\,dx = -\int (\cos 2x + \sin 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

647. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető azonosságokat, alapintegrálokat, és hogy $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$:

$$\int(\sin 3x+\cos 3x)^2\,dx=\int(1+\sin 6x)\,dx=x-\frac{\cos 6x}{6}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

648. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket:

$$\int\left(x^2-\sin x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}+\cos x+x+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

649. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket:

$$\int\left(\cos x-x^3+\sqrt[3]{x}\right)dx=\sin x-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

650. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket, továbbá azt, hogy $\left(\operatorname{tg}x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=-\frac{1}{x}+\operatorname{tg}x+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

651. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket, továbbá azt, hogy $\left(\operatorname{ctg}x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$:

$$\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=-\frac{1}{2x^2}+\operatorname{ctg}x+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

652. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket:

$$\int\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

653. Felhasználva a határozatlan integrál kiszámítására vonatkozó alapvető ismereteket:

$$\int\left(2\sin x-\cos x\right)dx=-2\cos x-\sin x+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

654. Felhasználva a kétszeres szögre vonatkozó addíciós összefüggést:

$$\int(4\sin 5x\cdot\cos 5x)\,dx=2\cdot\int\sin 10x\,dx=2\cdot\frac{-\cos 10x}{10}+c=-\frac{\cos 10x}{5}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

655. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető összefüggéseket és a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_1^2 \left(3x^2 - x + 1\right) dx = \left[x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = (8 - 2 + 2) - \left(1 - \frac{1}{2} + 1\right) = 6,5.$$

656. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető összefüggéseket és a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_{-1}^1 \left(4x^3 - x + 2\right) dx = \left[x^4 - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(1 - \frac{1}{2} - 2\right) = 4.$$

657. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető összefüggéseket, és a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_0^5 \left(x^2 - 5x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_0^5 = \left(\frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 5\right) - 0 = -\frac{95}{6}.$$

658. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$

659. Felhasználva az integrálásra vonatkozó alapvető összefüggéseket, és a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[\frac{-\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

660. A feladatban szereplő függvény primitív függvényei grafikonjainak egyenlete:

$$y = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + c.$$

Ez a grafikon illeszkedik a $(-2; 3)$ pontra, ezért

$$3 = \frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} + 3\frac{(-2)^2}{2} - 4(-2) + c,$$

$$3 = 4 + \frac{16}{3} + 6 + 8 + c,$$

$$c = -\frac{61}{3}.$$

A keresett primitív függvény hozzárendelési szabálya:

$$F(x)=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-4x-\frac{61}{3}.$$

661. A feladatban szereplő függvény primitív függvényei grafikonjainak egyenlete:

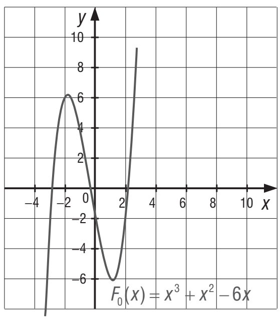
$$y=x^3+x^2-6x+c.$$

A $c=0$ esetén a primitív függvény $F_0(x)=x^3+x^2-6x$. Ennek deriváltfüggvényének zérushelyei: $\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$; $\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$. Az előbbiben helyi maximum, az utóbbiban helyi minimum van.

A maximum: $\frac{56+38\sqrt{19}}{27}$.

A minimum: $\frac{56-38\sqrt{19}}{27}$.

Ebből következően, ha $c<-\frac{56+38\sqrt{19}}{27}$ vagy $c>-\frac{56-38\sqrt{19}}{27}$, akkor a primitív függvény grafikonja egy pontban metszi az x tengelyt.



662. A zérushelyek: $k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Tekintettel arra, hogy a függvény periódusa π, ezért bármely két zérushely között ugyanakkora a vizsgált terület. A $[0;\pi]$ intervallumon vizsgálódunk.

Ismert trigonometrikus azonosságok:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$-\sin^2 x+\cos^2 x=\cos(2x).$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat.

$$2\sin^2 x = 1-\cos(2x),$$

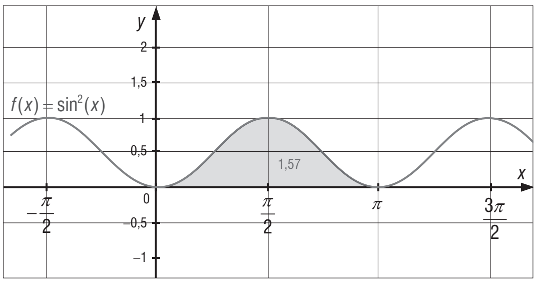
$$(1)\ \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

A keresett terület:

$$T = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$$

Alkalmazzuk az (1) helyettesítést!

$$T = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$



663. Az alkatrész térfogata $V = T\cdot h$, ahol T a fent definiált síkrész területe, h pedig a lemez vastagsága. Az $f(x)=g(x)$ egyenletet megoldva kapjuk az integrálás határait:

$$\frac{x^2}{3} = -x^2+\frac{4}{3},\ \text{ebből } x=\pm 1,$$

azaz:

$$T = \int_{-1}^{1} (g(x)-f(x))\,dx = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}\right)dx = \left[-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{3}x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}.$$

Azaz a térfogat:

$$V = T\cdot h = \frac{16}{9}\cdot 0,5 = \frac{8}{9}\ \text{cm}^3.$$

Így az alkatrész tömege: $m = \rho\cdot V = 2,4$ gramm.

664. Az $f(x)=g(x)$ egyenletet megoldva kapjuk az integrálás határait:

$$2x+3 = x^2,$$

$$x^2-2x-3=0,$$

$$x_1 = 3$$

vagy $x_2 = -1$. Azaz a kérdezett terület:

$$T=\int_{-1}^{3}\left(2x+3-x^2\right)dx=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ négyzetegység.}$$

665. Mivel

$$x^2=x,\text{ ebből } x\left(x-1\right)=0;$$

így a két görbe közös pontjai a (0;0) és (1;1) pontok. A [0;1] intervallumon az x tengely és a parabola grafikonja közötti terület:

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

A parabolaszelet területét megkapjuk, ha ezt kivonjuk a [0;1] intervallumon az x tengely és az egyenes közötti területből (derékszögű háromszög területe):

$$T=\frac{1\cdot 1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

666. A terület a szimmetria miatt éppen:

$$T=2\cdot\int_0^3\sqrt{3x}\,dx=2\sqrt{3}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right]_0^3=2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{27}\right)=12.$$

667. A megtett út a sebességfüggvény idő szerinti határozott integrálja a mozgás időintervallumának határaival, azaz mivel a motoros sebességét ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban mérve) meghatározhatjuk: $v_m(t)=20+4t$, így a motoros által megtett út:

$$\int_0^5 v_m(t)dt=\int_0^5(20+4t)dt=\left[20t+2t^2\right]_0^5=150\text{ méter.}$$

A versenyautó sebessége ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban mérve):

$$\tilde{v}(t)=\frac{50\sqrt{5t}}{3,6}.$$

A versenyautó által megtett út pedig:

$$\int_0^5\tilde{v}(t)dt=\frac{50\sqrt{5}}{3,6}\cdot\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^5=231,48\text{ méter.}$$

Tehát a versenyautó nyeri a versenyt.

668. A motor által megtett út:

$$\int_0^8 15\cdot\sqrt[3]{t}dt=15\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{t^4}\right]_0^8=180\text{ méter,}$$

amit egyenletes sebességgel a kerékpáros 8 másodperc alatt tesz meg, azaz a sebessége:

$$v_b = \frac{180}{8} = 22{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ ami éppen } 81\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

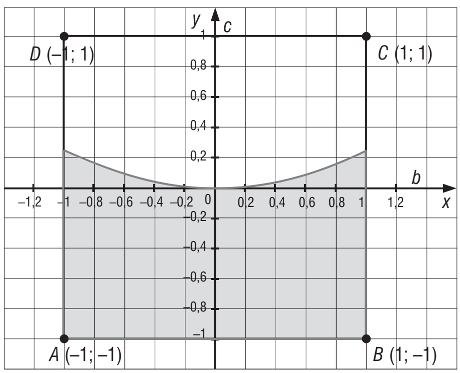
669. Tekintsük az ábrát! A $(b; c)$ számpárok halmaza kölcsönösen egyértelműen ráképezhető az $ABCD$ négyzetlap pontjaira.
A másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$b^2 - 4c \geq 0,$$

$$c \leq \frac{b^2}{4}.$$

Ennek a feltételnek megfelelő $(b; c)$ számpárok halmaza kölcsönösen egyértelműen ráképezhető az ábrán szürke színnel jelölt ponthalmazra. A geometriai valószínűségi mezőt alkalmazzuk, a mérték a terület.

$$P = \frac{2 + 2\int_0^1 \frac{b^2}{4}\,db}{4} = \frac{2 + \frac{1}{2}\int_0^1 b^2\,db}{4} = \frac{13}{24}.$$



Tartalomjegyzék

ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY
matematikából

> MEGOLDÁSOK

11-12. évfolyam

Összeállították: Fuksz Éva, Riener Ferenc, Dr. Ruff János, Schultz János
Alkotó lektor: Tarcsay Tamás
Lektor: Dobcsányi János

Felelős kiadó: Puskás Norbert
Szerkesztők: Dr. Mező Tamás, Szabóné Mihály Hajnalka
Tördelés és ábrák: Daróczi Edit, Szekretár Attila

Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6728 Szeged, Kollégiumi út 11/H
E-mail: info@maxim.co.hu
Telefon: (62) 548-444
Fax: (62) 548-443