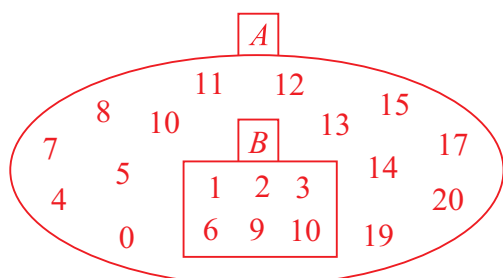


Halmazok, kombinatorika

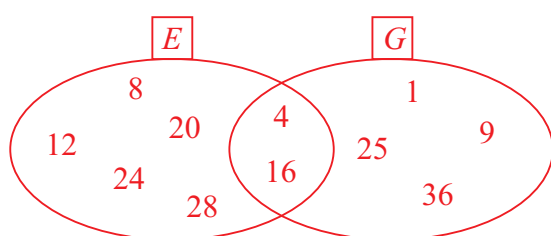


1.



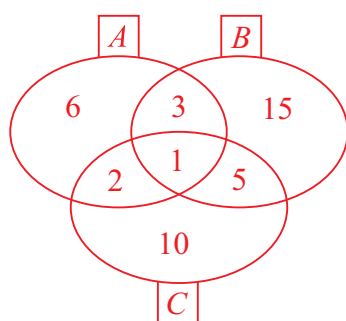
A B halmaz **részalmazza** az A halmaznak.
 $\bar{B} = \{0, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$.

2.



$E = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
 $G = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
 $E \cup G = \{1, 4, 8, 9, 12, 16, 20, 24, 25, 28, 36\}$; $G \cup E = \{1, 4, 8, 9, 12, 16, 20, 24, 25, 28, 36\}$
 $E \cap G = \{4, 16\}$; $G \cap E = \{4, 16\}$
 $E \setminus G = \{8, 12, 20, 24, 28\}$; $G \setminus E = \{1, 9, 25, 36\}$
 Az unió és a metszet.

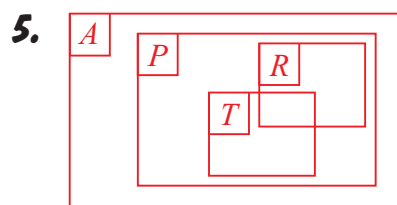
3.



$A = \{1, 2, 3, 6\}$; $B = \{1, 3, 5, 15\}$; $C = \{1, 2, 5, 10\}$

4.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 15\}$; $\overline{A \cup B} = \{10\}$
 $A \cap B = \{1, 3\}$; $\bar{A} \cap \bar{B} = \{10\}$
 $A \setminus C = \{3, 6\}$; $(A \cup B) \setminus C = \{3, 6, 15\}$
 $(A \cup C) \setminus (A \cap C) = \{3, 5, 6, 10\}$; $(A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{3, 5, 6, 10\}$



$$P \cap T = \{\text{téglalapok}\}; T \cap R = \{\text{négyzetek}\}$$

6. a) $C \setminus (A \cup B)$; b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; c) $(B \setminus C) \cup (A \cap C)$

7. $|A| = |B|$; $|A| = 450$; $|B| = 450$.

8. Az iskolának **600** tanulója van.

9. Az adott feltétel mellett **6144** darab számot írunk le, és **8856** darab számot hagyunk ki.

10. Legfeljebb háromjegyű, különböző számjegyekből álló, tízzel nem osztható számból **649** darab van.

11. a) 120; b) 48; c) 72

12. Az adott számkártyák felhasználásával **8** darab különböző háromjegyű, hattal osztható szám képezhető.

13. Az adott számkártyák felhasználásával **10** különböző hatjegyű szám képezhető.

14. a) 870; b) 216

15. a) 26; b) 22; c) 28

16. a) 72; b) 31; c) 66; d) 76

17. a) 35; b) 99; c) 128; d) 393

18. a) 21; b) Nem.

19. 336

20. 60 480

Hatványozás

Értelmezés

- 1.** a) 3^6 ; b) $2,4^4$; c) $(-0,6)^2$; d) $(-5)^3$; e) $\frac{3}{7}$; f) $\left(-\frac{5}{9}\right)^9$; g) b^8 ; h) $(-y)^5$; i) $\frac{1}{c}$; j) $\left(-\frac{1}{x}\right)^3$.
- 2.** a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; b) $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2$; c) 18; d) $0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25$;
e) $(-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$; f) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$; g) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$;
h) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4}$; i) $-(10 \cdot 10)$; j) $(-10) \cdot (-10)$; k) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$; l) $-\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5}$.
- 3.** a) 64; b) 32; c) 81; d) 1854; e) -8; f) -8; g) 1; h) 1; i) 1; j) $-\frac{81}{5}$; k) $\frac{1}{125}$;
l) $\frac{1}{5}$.
- 4.** a) <; b) =; c) =; d) >; e) =; f) <; g) <; h) >.
- 5.** a) 8, 8, 4, 6, 2, 4, 2, 2; b) 9, 7, 1, 3, 3, 7, 1, 9; c) 6, 4, 4, 6, 4, 6, 6, 4; d) 5, 5, 5, 5; e) 6, 6, 6, 6.
- 6.** 0, 1, 9;
5, 1, 6.

A hatványozás azonosságai

- 7.** a) $5^7 = 78\,125$; b) $3^9 = 19\,683$; c) $2^6 = 64$; d) $10^7 = 10\,000\,000$; e) $6^3 = 216$; f) $8^1 = 8$;
g) $\frac{1}{12}$; h) $9^2 = 81$; i) $2^{12} = 4\,096$; j) $3^6 = 729$; k) $10^4 = 10\,000$; l) $8^8 = 16\,777\,216$.
- 8.** a) $(-2,3)^4 \cdot 1,5^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0,7^1$; c) $1^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2$; d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0,5^1$.
- 9.** a) $10^2 \cdot 10^6 = 10^8$; b) $8^8 \cdot 8^8 = 8^{14}$; c) $(7^2)^3 = 7^6$; d) $\frac{5^3 \cdot 5^{20}}{5^{16}} = 5^7$.

HATVÁNYOZÁS

10.a) 10^6 ; b) 10^6 ; c) 10^9 ; d) 10^8 ; e) 10^6 ; f) $(4^3 \cdot 5^3)^2 = (20^3)^2 = 20^6 = 2^6 \cdot 10^6$;

g) $\left(\frac{5^4 \cdot 2^4}{5^4}\right)^2 = 2^8$; h) 3^{10} ; i) 8^4 ; j) $\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^6 \cdot 2^6}{3^3} = 2^{10} \cdot 3^5 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^5 = 12^5$.

11. =; <; =; <; <;

12.a) 3; b) 4; c) 6; d) 15; e) 6, 12; f) 16, 32; g) 2; h) 6; i) 12, 8; j) 12, 6.

13.a) $2^6 \cdot 2^9 = 2^{15} = 32\,768$; b) $3^4 \cdot 3^5 = 3^9 = 19\,683$; c) $6^3 \cdot 6^5 = 6^8 = 1\,679\,616$;

d) $8^3 \cdot 8^4 = 8^7 = 2\,097\,152$; e) $4^8 : 4^6 = 4^2 = 16$; f) $3^{12} : 3^9 = 3^3 = 27$;

g) $7^7 : 7^5 = 7^2 = 49$; h) $4^{10} : 4^8 = 4^2 = 16$; i) $2^{11} \cdot 2^{15} : 2^{10} = 2^{16} = 65\,536$;

j) $2^{19} : 2^{15} \cdot 2^8 = 2^4 \cdot 2^8 = 2^{12} = 4096$; k) $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6^3 : 6^5 = 6^9 : 6^5 = 6^4 = 1296$;

l) $7^9 : 7^7 \cdot 7^3 = 7^2 \cdot 7^3 = 7^5 = 16\,807$.

14.a) $2^{16} = 65\,536$; b) $3^{14} \cdot 2^7 = 4\,782\,969 \cdot 128 = 612\,220\,032$; c) $2^{11} = 2048$; d) $3^5 = 243$;

e) $5^5 = 3125$; f) $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$; g) $6^4 \cdot 2 = 1296 \cdot 2 = 2592$; h) $3^3 = 27$.

15.a) 8; b) 63; c) +11; d) 118; e) 1; f) $\frac{1}{3}$.

16.I; H; H; H; I.

17.<; =; =; <.

Számok normálalakja

18.a) $1,2 \cdot 10^5$; b) $3,4 \cdot 10^2$; c) $4,328 \cdot 10^4$; d) $5,67 \cdot 10^4$; e) $3 \cdot 10^3$; f) $1,4 \cdot 10^1$;
g) $6,5 : 10^3$; h) $9,87 : 10^8$; i) $1,3 : 10^1$; j) $2,007 : 10^4$; k) $2,3 : 10^{12}$; l) $9 : 10^1$.

19.a) 1230; b) 20 450 000; c) 500 000; d) 7 600 000 000; e) 0,000 13;
f) 0,000 000 007; g) 0,000 003 27; h) 0,000 005 12.

20.a) $2,5 \cdot 10^4$; b) $1,5 \cdot 10^3$; c) $1 \cdot 10^5$; d) $5,92 \cdot 10^6$; e) $4,5 : 10^2$; f) $7 \cdot 10^5$;
g) $3,294 \cdot 10^9$; h) $2 \cdot 10^4$.

Műveletek racionális számkörben

- 1.a) 0,4; b) 0,12; c) 0,7; d) 0,85; e) 1,88; f) 0,36; g) 1,875; h) 1,76.

A fenti tört alakú számok tizedes tört alakja **véges** tizedes tört.

$$5 = 5; \quad 25 = 5 \cdot 5; \quad 10 = 2 \cdot 5; \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 25 = 5 \cdot 5; \quad 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5;$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2; \quad 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

A nevezők prímtényezőss alakjában csak **2 és 5** prímtényezők szerepelnek.

2. a) 0,41 $\dot{6}$; b) 0,4 $\dot{4}$; c) 0,6 $\dot{6}$; d) 0,7 $\dot{1}$ 4285; e) 0,458 $\dot{3}$; f) 0,76923 $\dot{0}$;
g) 0,6428571; h) 0,4 $\dot{6}$; i) 0,05.

A fenti tört alakú számok tizedes tört alakja **végtelen szakaszos** tizedes tört.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 9 = 3 \cdot 3; \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 14 = 2 \cdot 7; \quad 15 = 3 \cdot 5; \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

A nevezők prímtényezőss alakjában itt már kettesen és ötösön kívül **más** prímtényezők is szerepelnek.

3. a) $0,23 = \frac{23}{100}$; b) $0,0065 = \frac{13}{2000}$; c) $0,138 = \frac{69}{500}$; d) $1,5 = \frac{3}{2}$;
e) $3,25 = \frac{13}{4}$; f) $10,5 = \frac{21}{2}$.

4. a) $-0,8 < -\frac{4}{5} < -0,09 < 0,075 < 0,3 < \frac{3}{4} < \frac{9}{11}$;

b) $340 : 10^1 < 310\,000 : 10^3 < 0,034 \cdot 10^4 < 3,5 \cdot 10^2 < 3500.$

5.

	0,45	35,8	6,5	7800	0,825
normálalak	$4,5 : 10^1$	$3,58 \cdot 10^1$	$6,5 \cdot 10^0$	$7,8 \cdot 10^3$	$8,25 : 10^1$
$\square \cdot 10$	$0,045 \cdot 10$	$3,58 \cdot 10$	$0,65 \cdot 10$	$780 \cdot 10$	$0,0825 \cdot 10$
$\square \cdot \frac{1}{100}$	$45 \cdot \frac{1}{100}$	$3580 \cdot \frac{1}{100}$	$650 \cdot \frac{1}{100}$	$780000 \cdot \frac{1}{100}$	$8,25 \cdot \frac{1}{100}$
törtalak	$\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$	$\frac{358}{10} = \frac{179}{5}$	$\frac{65}{10} = \frac{13}{2}$	$\frac{78000}{10}$	$\frac{825}{1000} = \frac{33}{40}$
$\square \cdot 10^n$ vagy $\square : 10^n$ és $\square \in \mathbb{Z}$	$45 : 10^2$	$358 : 10^1$	$65 : 10^1$	$7800 \cdot 10^0$	$825 : 10^3$

MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMKÖRBEN

6.

	74 100	100,7	49	4,12	0,0054
normálalak	$7,41 \cdot 10^4$	$1,007 \cdot 10^2$	$4,9 \cdot 10^1$	$4,12 \cdot 10^0$	$5,4 : 10^3$
$\square \cdot 100$	$741 \cdot 100$	$1,007 \cdot 100$	$0,49 \cdot 100$	$0,0412 \cdot 100$	$0,000054 \cdot 100$
$\square \cdot 0,1$	$741\ 000 \cdot 0,1$	$1007 \cdot 0,1$	$490 \cdot 0,1$	$41,2 \cdot 0,1$	$0,054 \cdot 0,1$
törtalak	$\frac{741000}{10}$	$\frac{1007}{10}$	$\frac{490}{10}$	$\frac{412}{100}$	$\frac{54}{10000}$
$\square \cdot 10^n$ vagy $\square : 10^n$ és $\square \in \mathbb{Z}$	$741 \cdot 10^2$	$1007 : 10^1$	$49 \cdot 10^0$	$412 : 10^2$	$54 : 10^4$

7. a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{5}{11}$; c) $\frac{8}{41}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{7}{11}$.

8. a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{7}{9}$; f) $\frac{5}{7}$; g) $\frac{2}{7}$; h) $\frac{5}{9}$; i) nem lehet.

9. a) $\frac{105}{168}$; b) $\frac{65}{104}$; c) $\frac{75}{120}$; d) $\frac{70}{112}$; e) $\frac{60}{96}$.

10. a) $\frac{11}{36}$; b) $-\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $-\frac{22}{105}$; e) $\frac{17}{20}$; f) +4,43; g) 21,87; h) +0,41;
i) (-1,365); j) $2\frac{17}{18}$.

11. a) $1\frac{1}{15}$; b) $\left(-\frac{5}{16}\right)$; c) $\left(-6\frac{2}{5}\right)$; d) $\frac{4}{7}$; e) $\left(-1\frac{1}{14}\right)$; f) $\left(-2\frac{16}{25}\right)$; g) $\left(\frac{3}{10}\right)$;

h) (-18); i) 0,72; j) 153,45; k) 68,175; l) 2,68; m) 500; n) 0,0125; o) (-0,108);

p) $\frac{7}{20}$; q) $\left(-9\frac{5}{7}\right)$; r) $\frac{1}{6}$.

12. a) $\frac{1}{2}$; b) 40,06; c) (-21); d) $5\frac{2}{3}$; e) 0; f) (-21); g) 10,65; h) 1; i) $\frac{259}{221}$;

j) $11\frac{29}{81}$; k) (-1); l) 40,06.

Számelmélet

Osztó, többszörös, oszthatóság

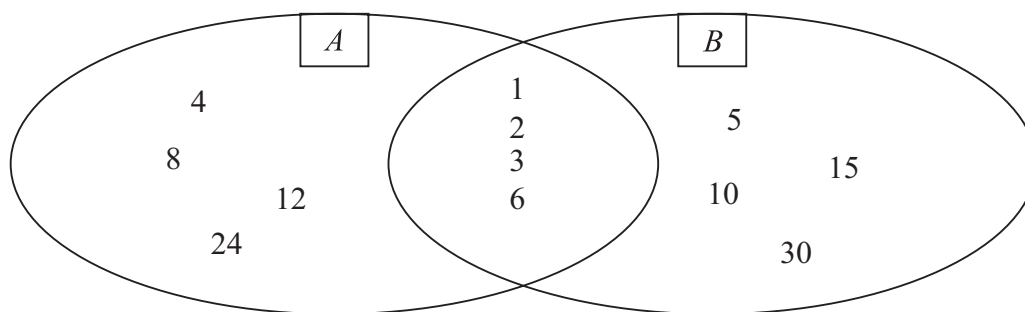
- 1.** a) 1, 2, 7, 14;
 b) 1, 19;
 c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72;
 d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Minden szám osztható **1**-gyel és **önmagával**.

- 2.** a) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 ...
 b) 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 ...
 c) 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 ...
 d) 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153 ...

Minden számnak többszöröse a **nulla** és **önmaga**.

- 3.** $A = \{24 \text{ osztói}\} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24;$ $B = \{30 \text{ osztói}\} = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$



24 és 30 közös osztói: 1, 2, 3, 6.

A legnagyobb közös osztó: 6.

4 és 6 közös többszöröse: 12, 24, 36,

Nem. A két számnak nincs kisebb közös többszöröse.

$[4;6] = 12.$

4.

	3-mal	4-gyel	6-tal	8-cal	9-cel	12-vel	18-cal
72	I	I	I	I	I	I	I
172	N	I	N	N	N	N	N
372	I	I	I	N	N	I	N
1992	I	I	I	I	N	I	N
2007	I	N	N	N	I	N	N
45618	I	N	I	N	N	N	N

- 5.** a) 123, 612, 1236, 9036; b) 750, 786, 3528, 3864; c) 765, 279, 1467, 1305;
 d) 690, 435, 3645, 1890; e) 384, 216, 5904, 4296.

SZÁMELMÉLET

6. a) 471, 525; b) 342, 144; c) 108, 420; d) 525, 930; e) 763, 531; f) 179, 287.

7.

	3-mal	6-tal	9-cel	12-vel	18-cal	20-szal	24-gyel
37 ■■■7	lehet	nem	lehet	nem	nem	nem	nem
555■	lehet	nem	lehet	lehet	nem	nem	nem
4■■■70	lehet	nem	lehet	nem	lehet	nem	lehet
■■■918	lehet	nem	lehet	nem	lehet	nem	nem

8. I; H; I; I; H; I.

9.

2	3	7	9	2	3	9	7	2	7	9	3	2	7	3	9	2	9	3	7	2	9	7	3
3	2	9	7	3	2	7	9	3	7	2	9	3	7	9	2	3	9	7	2	3	9	2	7
7	2	9	3	7	2	3	9	7	3	9	2	7	3	2	9	7	9	3	2	7	9	2	3
9	7	3	2	9	7	2	3	9	3	2	7	9	3	7	2	9	2	7	3	9	2	3	7

a) 24; b) 18; c) 6; d) 24.

10.

Szám	1254	34 263	22 222	202 020	128 703	645 320
9-cses maradék	3	0	1	6	3	2

a) 0; b) 3; c) 7; d) 1; e) 3; f) 5; g) 2; h) 0.

11.

Szám	98	113	136	151	163	180	201
7-es maradék	0	1	3	4	2	5	5

a) $98+136+151$; $98+163+180$; $98+163+201$;

b) $98 \cdot 113 \cdot 136$; $98 \cdot 151 \cdot 163$; $180 \cdot 98 \cdot 201$.

12.a) I; b) H; c) H; d) H.

SZÁMELMÉLET

Prímszám, összetett szám, prímtényezős felbontás

- 13.** A 9 osztói: 1, 3, 9. A 10 osztói: 1, 2, 5, 10.
 A 16 osztói: 1, 2, 4, 8, 16. A 20 osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 20.
 A 29 osztói: 1, 29. A 32 osztói: 1, 2, 4, 8, 16, 32.
 A 49 osztói: 1, 7, 29. Az 50 osztói: 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Prímszámok: 29.
 Összetett számok: 9, 10, 16, 20, 32, 49, 50.
 Páratlan számú osztója van: 9, 16, 49.
 További példák: 36, 64, 81, 100.
 A **négyzetszámok**nak van páratlan darabszámú osztója.

- 14.** a) I; b) H; c) H; d) H; e) H; f) I; g) I; h) I.

15.

$$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$76 = 2^2 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$324 = 2^2 \cdot 3^4$$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 5 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 1152 & 2 \\ 576 & 2 \\ 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$1152 = 2^7 \cdot 3^2$$

- 16.** I; I; I; H.
 I; H; I; H.

- 17.** $16 = 2^4$; $25 = 5^2$;
 $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $49 = 7^2$;
 $64 = 2^6$; $81 = 3^4$;
 $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$.

A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímtényező hatványkitevője **páros** szám.

- 18.** $B = 3^2 \cdot 5^4$
 $C = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7^4$

SZÁMELMÉLET

19. a) Négyzetszám; b) páratlan szám; c) osztható 9-cel; d) 5-re végződik;
e) osztható 35-tel; f) osztható 3-mal; g) osztható 15-tel; h) osztható 21-gyel.

20. a) I; b) H; c) I; d) H; e) I; f) I.

21. a) $a = 2, 3, 4$;
b) $b = 3, 4, 5$;
c) $x = 2, 3, 4 \dots$; $y = 1, 2, 3 \dots$;
d) $k = 2, 3, 4 \dots$; $l = 0, 1, 2 \dots$; $m = 2, 3, 4 \dots$;
e) $e = 2, 4, 6, 8 \dots$;
f) $h = 3, 6, 9, 12$; $k = 3, 6, 9, 12$.

Osztok és többszörösök hatványalakból

22.

525	5	A prímtényezők: 3, 5, 7.
105	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $3 \cdot 5 = 15$; $5 \cdot 5 = 25$; $3 \cdot 7 = 21$;
21	3	$5 \cdot 7 = 35$.
7	7	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$;
1		$5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$.

Az 525 osztói: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525.

980	2	A prímtényezők: 2, 5, 7.
490	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 5 = 10$;
98	2	$2 \cdot 7 = 14$; $5 \cdot 7 = 35$; $7 \cdot 7 = 49$.
49	7	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$; $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$;
7	7	$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$; $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$; $5 \cdot 7 \cdot 7 = 245$.
1		Az összes lehetséges 4 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$;
		$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = 196$; $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 490$.

A 980 osztói: 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 49, 70, 98, 140, 196, 245, 490, 980.

1260	2	A prímtényezők: 2, 3, 5, 7.
630	5	Az összes lehetséges 2 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$;
126	2	$2 \cdot 7 = 14$; $3 \cdot 3 = 9$; $3 \cdot 5 = 15$; $3 \cdot 7 = 21$; $5 \cdot 7 = 35$.
63	3	Az összes lehetséges 3 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$;
21	3	$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$; $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$; $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$; $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$;
7	7	$3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.
1		Az összes lehetséges 4 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$;
		$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$; $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$; $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$.
		Az összes lehetséges 5 prímtényezős szorzat: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$;
		$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$; $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 630$.

Az 1260 osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 28, 30, 35, 36, 42, 63, 70, 84, 90, 105, 126, 140, 180, 210, 252, 315, 420, 630, 1260.

SZÁMELMÉLET

23. *A, B, E.*

- 24.** a) $a = 4, 5, \dots$; b) $b = 2, 3, \dots$;
 c) $c = 0, 1, 2, \dots$; d) $d = 4, 5, 6, \dots$;
 e) $e = 0, 1, 2, \dots$; f) $f = 2, 3, 4, \dots$

- 25.** a) 1, 2, 5, 10, 25, 50;
 b) 1, 3, 5, 15;
 c) 1, 3, 7, 9, 21, 63.

- 26.** a) 60; b) 196; c) 1; d) 540; e) 2; f) 45.

- 27.** a) $a = 2$; $b = 1, 2, \dots$;
 b) $c = 2$; $d = 1, 2, \dots$;
 c) $e = 3$; $f = 2$; $g = 4$;
 d) $h = 4$; $j = 1, 2, \dots$; $k = 4, 5, 6$, $m = 2$.

- 28.** a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$; b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$; c) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$; d) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$;
 e) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; f) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

- 29.** a) $[12; 35] = 420$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $35 = 5 \cdot 7$.
 b) $[7; 8] = 56$; $7 = 7$; $8 = 2^3$.
 c) $[9; 10] = 90$; $9 = 3^2$; $10 = 2 \cdot 5$.
 d) $[15; 14] = 210$; $15 = 3 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$.

- 30.** a) $a = 4$; $b = 2$;
 b) $c = 5$; $d = 1$;
 c) $e = 6$; $f = 4$; $g = 1, 2, 3, 4, 5$;
 d) $h = 4$; $j = 3$; $k = \max 4$; $m = 4$.

31.

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

480	2
240	5
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$(216; 480) = 24$

$[216; 480] = 4320$

SZÁMELMÉLET

32. $1700 \begin{array}{l} | 2 \\ 850 | 2 \\ 425 | 5 \\ 85 | 5 \\ 17 | 17 \\ 1 | \end{array}$ $1530 \begin{array}{l} | 2 \\ 765 | 5 \\ 153 | 3 \\ 51 | 3 \\ 17 | 17 \\ 1 | \end{array}$ $(1700; 1530) = 170$
 $[1700; 1530] = 15\,300$

33. a) =; b) =.

Két szám szorzata **egyenlő** a két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének a szorzatával.

34. $615 \begin{array}{l} | 5 \\ 123 | 3 \\ 41 | 41 \\ 1 | \end{array}$ $4200 \begin{array}{l} | 2 \\ 2100 | 2 \\ 1050 | 5 \\ 210 | 5 \\ 42 | 2 \\ 21 | 3 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $3690 \begin{array}{l} | 2 \\ 1845 | 5 \\ 369 | 3 \\ 123 | 3 \\ 41 | 41 \\ 1 | \end{array}$ $(615; 4200; 3690) = 15$
 $[615; 4200; 3690] = 516\,600$
 $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$
 $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
 $3690 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 41$

35. a) $(980; 1225) = 245$ $980 \begin{array}{l} | 2 \\ 490 | 5 \\ 98 | 2 \\ 49 | 7 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $1225 \begin{array}{l} | 5 \\ 245 | 5 \\ 49 | 7 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$ $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
 $[980; 1225] = 4900$
 $\frac{980}{1225} = \frac{4}{5}$
 $\frac{11}{980} - \frac{3}{1225} = \frac{43}{4900}$

b) $(475; 570) = 95$ $475 \begin{array}{l} | 5 \\ 95 | 5 \\ 19 | 19 \\ 1 | \end{array}$ $570 \begin{array}{l} | 2 \\ 285 | 5 \\ 57 | 3 \\ 19 | 19 \\ 1 | \end{array}$ $475 = 5^2 \cdot 19$
 $[475; 570] = 2850$
 $\frac{475}{570} = \frac{5}{6}$
 $\frac{8}{475} + \frac{7}{570} = \frac{83}{2850}$

SZÁMELMÉLET

c) $(882; 1134) = 126$

$[882; 1134] = 7938$

$$\frac{882}{1134} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{5}{882} - \frac{13}{1134} = -\frac{23}{3969}$$

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

1134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

$882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

$1134 = 2 \cdot 3^4 \cdot 7$

36. a) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 7^2) = 56$, $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 7^2] = 3528$, $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 7^2} = \frac{9}{7}$, $\frac{5}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7} + \frac{2}{2^3 \cdot 7^2} = \frac{53}{3528}$;

b) $(2^2 \cdot 5; 3 \cdot 7) = 1$, $[2^2 \cdot 5; 3 \cdot 7] = 840$, $\frac{2^2 \cdot 5}{3 \cdot 7} =$ nem lehet, $\frac{7}{2^2 \cdot 5} - \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{67}{420}$;

c) $(3^2 \cdot 5 \cdot 11; 5^2 \cdot 11) = 55$, $[3^2 \cdot 5 \cdot 11; 5^2 \cdot 11] = 2475$, $\frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11}{5^2 \cdot 11} = \frac{9}{5}$, $\frac{2}{3^2 \cdot 5 \cdot 11} + \frac{3}{5^2 \cdot 11} = \frac{37}{2475}$.

37. a) I; b) I; c) I; d) I; e) I; f) H; g) I; h) H; i) I.

38. a) I; b) H; c) H; d) H; e) I; f) I; g) H.

39. a) Páratlan; b) páros; c) páros; d) páratlan; e) páros; f) páratlan; g) páros; h) páros; i) páratlan.

40.

a	$3^4 \cdot 7$	2	$3 \cdot 11$	1
b	3^2	$2^3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7$	5^3
$(a; b)$	3^2	2	3	1
$[a; b]$	$3^4 \cdot 7$	$2^3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3
$a \cdot b$	$3^6 \cdot 7$	$2^4 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3
$(a; b) \cdot [a; b]$	$3^6 \cdot 7$	$2^4 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5^3

41. Mindkét számnak ugyanannyi osztója van.

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12; 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$

42. A legnagyobb háromjegyű számnak a természetes számok körében a **0** a legkisebb többszöröse.

SZÁMELMÉLET

43.

8	3	7	0
---	---	---	---

8	7	3	0
---	---	---	---

7	8	3	0
---	---	---	---

7	3	8	0
---	---	---	---

3	8	7	0
---	---	---	---

3	7	8	0
---	---	---	---

44.

5	2	6	2	7	2	3
---	---	---	---	---	---	---

5	5	6	5	7	5	3
---	---	---	---	---	---	---

5	8	6	8	7	8	3
---	---	---	---	---	---	---

45. a) ö; b) p; c) p; d) p; e) ö; f) ö; g) ö; h) ö; i) ö; j) ö.

46. a) 12, 4, 20, 28, 36;
b) 8, 16, 24, 32, 40;
c) Nincs ilyen szám.

47. a) 2520; b) 2520; c) 2520;
d) Ugyanazt a számot kaptuk eredményül.
Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor 10-zel is osztható.
Ha osztható 10-zel, akkor 2-vel és 5-tel is, ha 9-cel, akkor 3-mal is, ha 8-cal, akkor 4-gyel is, és ha 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is.

48. a) $A = 2^2 \cdot 7$; b) $B = 5$; c) $C = 2^3$; d) $D = 3, 2, \dots$

49. a) Nincs ilyen szám. b) $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$.

50.
$$= \frac{4168}{11550}$$

51. Ha két természetes szám közül az egyik a másiknak háromszorosa, akkor a két szám összege biztosan osztható **2**-vel, **4**-gyel és **a kisebb természetes számmal**.

52. Ha két pozitív egész szám közül az egyik a másiknak többszöröse, akkor a két szám legnagyobb közös osztója **a kisebb szám**.

53. Ha két természetes szám mindegyikét elosztjuk a legnagyobb közös osztójukkal, akkor a hányadosok **relatív prím** számok lesznek.

54. Igen, mert a legkisebb közös többszörös tartalmazza a számok összes prímtényezőjét az előforduló legnagyobb kitevőn, a legnagyobb közös osztó pedig a közös prímtényezőket.

SZÁMELMÉLET

55. Nem.

A 2-nél nagyobb prímszámok mindegyike **páratlan** szám, és két **páratlan** szám összege biztosan **páros** szám, ezért az **összeg** összetett szám, ami nagyobb 2-nél.

56. a) $\underbrace{1000\dots08}_{32 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 9, ezért osztható 9-cel.

b) $\underbrace{1000\dots074}_{8 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 12, ezért osztható 3-mal és páros szám, ezért osztható 2-vel. Mivel 2-vel és 3-mal is osztható, ezért osztható 6-tal.

c) $\underbrace{1000\dots08}_{24 \text{ db nulla}}$ A számjegyek összege 9, ezért osztható 9-cel. Az utolsó 3 számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal, ezért osztható 8-cal. Mivel 9-cel és 8-cal is osztható, ezért osztható 72-vel.

57. $A + B = 6$.

58. Az ismeretlen osztó a 24.

59. Az azonos számjegyekből álló háromjegyű számok mindegyike 111 egész számú többszöröse. A $111 = 3 \cdot 37$, ezért osztható 37-tel, így minden ilyen szám osztható 37-tel.

60. A szorzat prímtényezői között csak 2 és 3 szerepel. Ha a szorzat 0-ra végződne, akkor prímtényezői között legalább egyszer szerepelnie kellene az 5-nek is.

61. A művelet elvégzése után 3-mal is osztható számot kapunk, így biztosan nem csak 1-gyel és önmagával osztható az eredmény.

Arányos következtetések, százalékszámítás

1. $K_1 = 16 \text{ cm}, \quad K_1 : K_2 = 16 : 20 = 4 : 5,$
 $K_2 = 20 \text{ cm}, \quad K_2 : K_1 = 20 : 16 = 5 : 4,$
 $T_1 = 16 \text{ cm}^2, \quad T_1 : T_2 = 16 : 25,$
 $T_2 = 25 \text{ cm}^2, \quad T_2 : T_1 = 25 : 16.$

2. a) $5 : 24$; b) $12 : 3$; c) $7 : 6$; d) $8 : 15$; e) $3 : 32$; f) $15 : 4$; g) $72 : 35 : 20$; h) $17 : 4 : 10$.

3. A 12 a 4-nek 0,8-szerese.
A 10 a 8-nak $\frac{7}{6}$ -szorosa.
A 10 a 8-nak $\frac{7}{6}$ -szorosa.
A 3 a 2-nek 3-szorosa.
A 4 az 5-nek $\frac{5}{4}$ -szerese.
A $\frac{3}{5}$ a $\frac{7}{10}$ -nek 1,5-szerese.
A 8 a 10-nek $\frac{6}{7}$ -szerese.

4.

x	6	9	0,3	2,1	360	0,75	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	1203	0,0039
y	10	15	0,5	3,5	600	1,25	$1\frac{1}{4}$	$\frac{10}{7}$	2005	0,0065

- 5.** a) 223, 323, 523, 723, 246, 346, 546, 746, 269, 369, 569, 769.
b) Összesen **12** szám felelt meg a feltételnek.
c) A feltételnek megfelelő összes szám közül **4** páros szám.

6. a) 0,63; b) 63,5; c) 17,5; d) 118; 212,4.

7. A kisebb szám **3,9**, a nagyobb szám **6,5**.

8. A kisebb szám **7,8**, a nagyobb szám **18,2**.

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

9. A nagyobb szám $\frac{3}{4}$.

10. A kisebb szám $\frac{1}{2}$.

11. a) $a = 21$ cm, $b = 28$ cm; b) $T = 588$ cm².

12. a) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm; b) $K = 70$ cm.

13. A háromszög belső szögei 40° , 90° , 50° .

14. A háromszög belső szögei 45° , 45° , 50° vagy $67,5^\circ$, $67,5^\circ$, 45° .

15. A három szám **26**, **65**, **104**.

16. A rövidebb rúd hossza **420 mm**, a hosszabb rúd hossza **900 mm**.

17. Kata **72**, Piri **45**, Juli **105** fényképet készített.

18. Dénes **56 000 Ft-ot**, János **70 000 Ft-ot**, Lajos **49 000 Ft-ot** kapott a pénzből.

19. a) 15 zsák liszt tömege 420 kg; b) 1372 kg liszt 49 zsákban fér el.

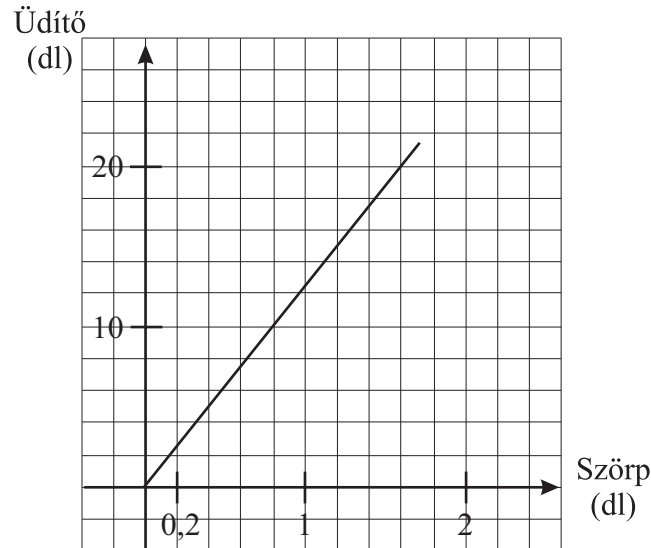
20. a) 7 hektár területhez **875 kg** műtrágya szükséges.
b) 1750 kg műtrágya **14 ha** területre elegendő.

21. a)

Szörp mennyisége (dl)	0,2	0,08	0,8	1,2	1,6	5	7,5	10
Üdítő mennyisége (dl)	2,5	1	10	15	20	62,5	93,75	125

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

b)



22.

Eltelt idő t (óra)	0,5	1	1,5	2	3	4	4,5	5
Megtett út s (km)	2	4	6	8	12	16	18	20
$\frac{s}{t} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$	4	4	4	4	4	4	4	4

23. Ha 7 óra alatt szeretné ugyanezt az utat megtenni, akkor $20\frac{4}{7} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kell haladnia.

24. Nyolc fő esetén fejenként **2 100 Ft** lenne a bérleti díj.

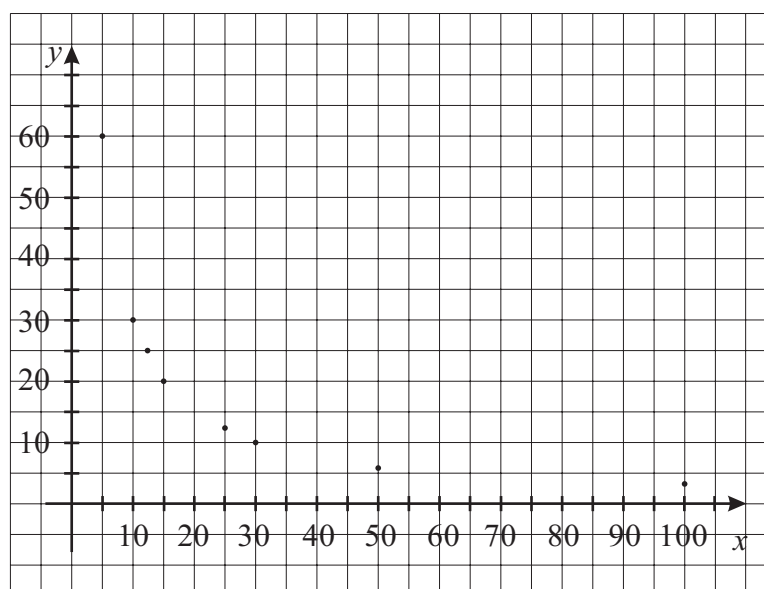
25. Ha 18 cm magas lépcsőket alkalmaznak, akkor **80** lépcső vezetne a kilátó tetejére.

26. a)

Egy üveg irtartalma x (liter)	100	50	30	25	20	12	10	5
A szükséges üveg mennyisége y (darab)	3	6	10	12	15	25	30	60
$x \cdot y$	300	300	300	300	300	300	300	300

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

b)



27.

Az ágyás egyik oldala a (méter)	0,5	1	1,5	2	3	4	5
Az ágyás másik oldala b (méter)	48	24	16	12	8	6	4,8
$a \cdot b$	24	24	24	24	24	24	24

Arányossági feladatok

- 28.** a) Az élek hossza **16,8 cm, 21 cm, 37,8 cm**.
 b) A téglatest felszíne **3563,28 cm²** és térfogata **13335,84 cm³**.
- 29.** a) Az élek hossza **40 cm, 80 cm, 180 cm**.
 b) A téglatest felszíne **352 dm²** és térfogata **576 dm³**.
- 30.** a) A háromszög oldalai **5 cm, 6 cm, 6,5 cm** hosszúak.
 b) A háromszög kerülete **15 cm**.
 c) A háromszög területe **7,5 cm²**.
- 31.** A 8 doboz festék **21 m** hosszú falfelületre elegendő.
- 32.** 14 munkás 3 óra alatt **1008** munkadarabot készít el.
- 33.** A második ládában **20** sorba helyezték el a dobozokat.
- 34.** 8 csapon keresztül 900 liter vizet **1,5 óra** alatt gyűjthetünk.

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

- 35.** a) A fiúk száma **12**.
 b) A fiúk száma **9**.
 c) A fiúk száma **9**, a lányok száma **15**.
- 36.** a) $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_1 : a_2 = 1:3$.
 b) $A_1 = 96$ cm², $A_2 = 864$ cm², $A_1 : A_2 = 1 : 9$.
 c) $V_1 = 64$ cm³, $V_2 = 1728$ cm³, $V_1 : V_2 = 1 : 27$.
- 37.** a) A telek szélességét ábrázoló szakasz hossza **10,2 cm**.
 b) A tervrajz méretaránya: **1 : 500**.
 c) A telek területe: $T_1 = 4435$ m².
 A telek ábrájának területe: $T_2 = 173,4$ cm².
 A két terület aránya: $T_1 : T_2 = 250\ 000 : 1$.
- 38.** A szoba padlójának lakkozásához **2,835 kg** anyagot kell vásárolni.
- 39.** A második kertben a fákat **27** sorba ültették el.
- 40.** A szivattyút **112 órát** kell üzemeltetnünk.
- 41.** a) 12 ember napi 4 órai munkával **24** nap alatt végezné el ezt a feladatot.
 b) Napi 8 órai munkával **16** ember végezné el ezt a feladatot 9 nap alatt.
- 42.** Kati **1900** forintot, Ede **625** forintot, és Lilla **875** forintot gyűjtött.
- 43.** 1800 liter víz gyűjtéséhez **7,5** órára van szükség.
- 44.** A versenyre **156** korzójegyet, **468** tribünjegyet, és **780** állójegyet adtak el.

Tötrész számítás, százalékszámítás

- 45.** A kérdésekre egy-egy szorzat felírásával válaszolj, majd számítsd ki a keresett számot!
- a) $15 \cdot \frac{3}{5} = 9$, $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$, $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$
- b) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}$, $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27}$;
- c) $3,2 \cdot 0,8 = 2,56$, $3,2 \cdot \frac{10}{8} = 4$, $0,8 \cdot \frac{10}{32} = 0,25$.
- 46.** A keresett szám a **4**.
- 47.** a) -14 ; b) -6 ; c) -96 .

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

- 48.** a) 115,2; 2000; 5%; 2000%.
b) 24,5; 5000; 2%; 5000%.
c) 180; 125; 80%; 125%.
- 49.** a) A nagyobb szám **-600**, a kisebbnél **600-zal** nagyobb.
b) A nagyobb szám **-15**, a kisebbnél **5-tel** nagyobb.
c) A nagyobb szám **-32**, a kisebbnél **8,5-del** nagyobb.
- 50.** a) Az eddig megtett út **96** kilométer.
b) A teljes útból még **144** kilométer van hátra.
c) A vonat óránként **60** kilométer utat tesz meg.
d) Az egész út megtételéhez **4 órára** van szükség.
- 51.** A kötélteljes hossza **32,5** méter.
- 52.** a) A habarcs $\frac{18}{29}$ része homok, $\frac{7}{29}$ része mész és $\frac{4}{29}$ része víz.
b) A habarcs kb. 62 százaléka homok, kb. 24 százaléka mész és kb. 14 százaléka víz.
- 53.** a) A tervezett túra **53,5** kilométer hosszú volt.
b) A második nap **22,47** kilométert tettünk meg.
c) Az első nap a tervezettnél **11,77** kilométerrel kevesebb utat tettünk meg.
- 54.** A vásárló **9930** forintot spórolt meg.
- 55.** a) **70,2** négyzetméterre ültettek paprikát.
b) A paprikával beültetett rész a teljes kert **23,4** százaléka.
- 56.** a) A gép a két árváltoztatás után **24 828,5** forintba kerül.
b) A változás **2,25** százalékos.
- 57.** a) Az első árváltozás **3,75** százalékos.
A második árváltozás **3,6** százalékos.
b) Az első árváltozás **25** százalékos.
A második árváltozás **20** százalékos.
- 58.** a) A könyv eredeti árára **2100** forint.
b) A figyelmes vásárló **735** forintot spórolt.
- 59.** a) A téglatest éleinek hossza **12** cm, **16,8** cm, **9** cm.
b) A test felszíne **6,6** százalékkal változott meg.
c) A test térfogata **5** százalékkal változott meg.

ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Mértékváltások

60. 35,5	1240
7800	75
12,3	8,9
60 000	54,030
3240	9,7
61. 732 000 000	0,66
0,2005	4 200 000
6 580 000	6
8000	32 000
9,8	0,037
62. 684,8	85040
15,39	0,137
5063	0,45
67,5	45 000
750 000	56

Műveletek mennyiségekkel

63. a) 62	950
15,5	1616
581,4	
b) 15 000	13
40 800	67
30,42	
c) 3,4	75
1 500 000	12,5
119,6	
d) 160	50
0,3	9 750
0,178	
e) 69	2,5
5	$\frac{1}{3}$
1080	

Algebrai kifejezések

- 1.** a) $a + b$; b) $4a - b$; c) $(a + b) \cdot 4$; d) $\frac{a}{3} + 8$; e) $\frac{b-5}{4}$; f) $0,54c$;
 g) $\frac{2}{3}x + y$; h) $x - 0,25y$; i) $(x + y)^2$; j) $x + y^2$; k) $(x^2 - 3) \cdot 0,6$.

2.

Algebrai kifejezés	$\frac{2}{5}b^2$	$3a$	$0,24x$	$-2,4y$	$-c^3$	$\frac{4d}{7}$	$\frac{e}{9}$	$-\frac{f}{2}$	ab
Együttható	$\frac{2}{5}$	3	$0,24$	$-2,5$	-1	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{2}$	1
Változó	b^2	a	x	y	c^3	d	e	f	ab

- 3.** a) 32; b) -23; c) -44; d) 7,48; e) $-\frac{11}{6}$;
 f) $2\frac{1}{4}$; g) $32\frac{11}{36}$; h) -0,88; i) -204; j) $-\frac{4}{5}$.

- 4.** $7a$ -val egynemű: $-\frac{1}{4}a$; $0,3a$; $14a$;
 $5b^2$ -tel egynemű: $2b^2$; $2\frac{3}{5}b^2$; $\frac{b^2}{3}$;
 $0,2ab$ -vel egynemű: $3ab$; $\frac{5ab}{7}$; $1,8ab$; $-ba$;
 a^2b -vel egynemű: $16a^2b$.

- 5.** a) Például: x^3 , $-x^3$, $\frac{2}{7}x^3$, $\frac{x^3}{8}$, $0,3x^3$
 b) Például: a^2 , $-2a^2$, $\frac{a^2}{8}$, $0,1a^2$, $\frac{5a^2}{3}$;
 c) Például: x^2y^3 , $-x^2y^3$, $3x^2y^3$, $0,6x^2y^3$, $\frac{12x^2y^3}{7}$;
 d) Például: b^4c , $-b^4c$, $5b^4c$, $9cb^4$, $-\frac{2}{3}cb^4$.

- 6.** a) $a + a + a + a + a + a = 6a$; b) $b + c + b + c + b + c + b + c + b = 5b + 4c$;
 c) $2d + 3d - 6d = -d$; d) $1,2e + 2,5e - 0,24e - 1,16e + 3,3e = 5,6e$;
 e) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x + \frac{7}{12}x = \frac{16}{12}x = \frac{4}{3}x$; f) $2d^2 - 1\frac{1}{2}d^2 - 3\frac{1}{2}d^2 = -3d^2$;
 g) $0,8y^3 - 1,2y^3 - 0,1y^3 = 0,8y^3 - 1,3y^3 = (-0,5y^3)$; h) $1,5x^2y - 0,9x^2y + 2x^2y = 2,6x^2y$.

ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

7. a) $14a^2 + a$; b) $-3b - 8$; c) $2c^2 - 3d + d^3$; d) x^2 ; e) $1,7e^3$; f) $4ab - ab^2 + 2a^2b$;
g) $1a^2bc - 4,2abc^2$; h) $-2a^2 - 0,8a$; i) $\frac{13}{10}yx^2 - \frac{11}{12}x$.

8. a) $10a - 2b - 10c$; b) $2x + y + 16z$; c) $\frac{7}{6}a + \frac{7}{6}b - \frac{1}{2}c$; d) $0,8xy - 3xz - 1,2yz$;
e) $1,85a^2 + 4b - 0,6ab$; f) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{15}y - z^2$.

9. $A + B - C = -4x^2 + 2xy - 4y^2 - 3$; $A - B + C = 6x^2 - 9xy + 2y^2 + 13$; $-A + B + C = xy + 8y^2 - 5$.

10. a) -5 ; b) $2,5$; c) $\frac{1}{3}$; d) $0,5$; e) -2 ; f) $-0,2$; g) -5 ; h) $-\frac{1}{7}$.

11. a) x^9 ; b) y^6 ; c) a^{10} ; d) a^8b^4 ; e) $\frac{9}{16}x^2$; f) $\frac{8}{27}x^6$; g) $81a^8b^4$; h) $64a^6b^9$; i) y^4 ; j) y^{14} .

12. a) $-6ac$; b) $12x^3$; c) $2y^2$; d) $4a^2b$; e) cd ; f) $-0,006ef$; g) $\frac{1}{6}x^3y^2$; h) $-ab^2c$.

13. a) $3a^2$; b) $3a$; c) $4a^2$; d) $-\frac{3}{2}b$; e) $-0,5ab$; f) $0,6b^2c$; g) $-\frac{1}{2}a^2$; h) $\frac{a}{b}$.

14.

·	-6ab	1,4a ²	5ab ³	8a ² b	-10a ³ b ²
4b	-24ab ²	5,6a ² b	20ab ⁴	32a ² b ²	-40a ³ b ³
0,6a ²	-3,6a ³ b	0,84a ⁴	3a ³ b ³	4,8a ⁴ b	-6a ⁵ b ²
$\frac{1}{4}ab^2$	$-\frac{3}{2}a^2b^3$	0,35a ³ b ²	$\frac{5}{4}a^2b^5$	2a ³ b ³	-2,5a ⁴ b ⁴

15.

osztandó osztó	-6ab	1,4a ²	5ab ³	8a ² b	-10a ³ b ²
2a	-3b	0,7a	2,5b ³	4ab	-5a ² b ²
0,5b	+12a	$\frac{-2,8a^2}{b}$	-10ab ²	-16a ²	20a ³ b
$\frac{1}{10}ab$	-60	$\frac{14a}{b}$	50b ²	80a	-100a ² b

ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

16. a) $20x + 10$; b) $12y + 28$; c) $20a - 60ab$; d) $-1,2x - 1,84$; e) $\frac{4}{75}c + \frac{1}{10}$; f) $\frac{5a}{14} - \frac{10b}{3}$.

17. a) $-12a - 6a^2$; b) $20b^3 - 30b^2$; c) $11,1c^4d + 0,75cd^2$;
 d) $-0,07x^3y^3 + 39,2xy^4$; e) $\frac{1}{6}e^4f^5 + \frac{1}{4}ef^4$; f) $-\frac{1}{4}a^3b^3 + 10a^4b^2$.

18. a) $-3a - 8b$; b) $6x - 4y + 10z$; c) $27a - 14c - 13$; d) $3x^2 - 14y^2 + 13xy + 6x + 6y$;
 e) $2ab + 2b^2$; f) $-x^2 - 20xy$; g) $0,7a^2 - 0,4b^2 + 19,58ab$; h) $-4,3c^3 + 4c^3d$;
 i) $\frac{3}{10}e^2 + \frac{1}{15}e$; j) $-12\frac{1}{4}y + 19\frac{5}{7}$; k) $6a - 41b$.

19. a) $2x - 4y + z$; b) $-2a - 3b + 4c$; c) $2c^2 + c - 0,3$; d) $-0,7 + 3d^3 - 0,25d$;
 e) $\frac{1}{12}e + \frac{2}{15} - \frac{1}{18}e^3$; f) $\frac{5f}{12} + \frac{g}{2} - \frac{3}{4}$.

20. a) $8a - 6$; b) $-2b^2 + 3$; c) $-3 + 2c$; d) $0,08d - 0,6d^3$; e) $\frac{6}{5} - \frac{1}{3}f$; f) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{8}{3}$.

21. a) $\frac{5a+24}{60}$; b) $\frac{60-13b}{30}$; c) $\frac{11c+4}{14}$; d) $\frac{10d^2+3d+30}{60}$;
 e) $\frac{9x-14}{12}$; f) $\frac{-7y+5}{6}$; g) $\frac{-26z+19}{10}$.

22. a) $3(a - b)$; b) $a(5x - y)$; c) $6y(x - 1)$; d) $x(2y + 1)$; e) $48ab$; f) $40xy$; g) $d(25c - 2)$;
 h) $2b(15a - 1)$; i) $45ab$; j) $6ab$; k) $24xy$; l) $45ab$; m) $-195xy$;
 n) $ab(4b^2c - 2 + c - a)$; o) $\frac{2}{9}x^2y(xy - 2y - 3)$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

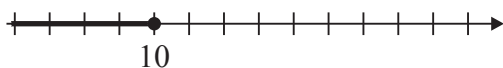
1. Azonosságok: a), c), d).

2. Azonos egyenlőtlenségek: a), d), e).

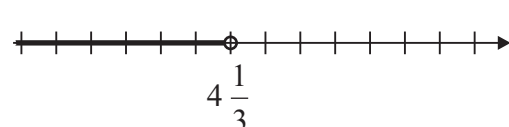
3. a) $x = 12$; b) $y = 14$; c) $z = 18$; d) $a = -4$; e) $b = 2$; f) $c = 2$.


4. a) $a = -11$; b) $b = 1$; c) $c = -2$; d) $d = 3$; e) $e = 15$; f) $f = 4$.

5. a) $a = 7$; b) $x = 1$; c) $x = 1$; d) $y = -11$; e) $x = -10$; f) $x = 2$; g) $x = 2$.

6. a) $x \leq 10$, 

b) $y \geq 4$, 

c) $z < \frac{26}{6} = 4\frac{1}{3}$, 

d) $a > 4$, 

7. $a = \frac{T}{b}$, $a = \frac{V}{b \cdot c}$;


$b = \frac{K}{2} - a$, $m = \frac{\Delta E}{c \cdot \Delta T}$;


$c = \left(\frac{A}{2} - ab \right) : (a + b)$;

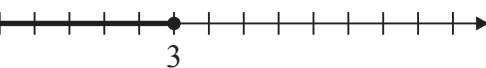
$e = \frac{2T}{f}$;

$m = \frac{2T}{a + c}$, $c = \frac{2T}{m} - a$.

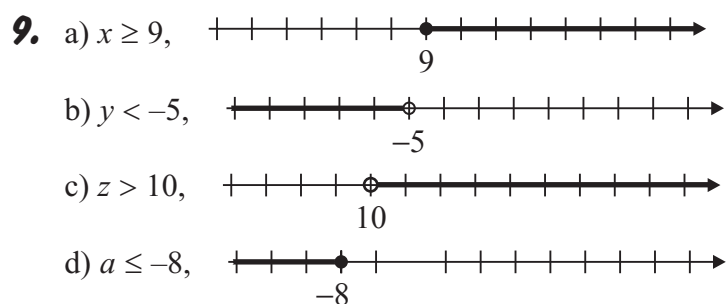
8. a) $a < 10$, 

b) $b \leq 4$, 

c) $c > 7$, 

d) $d \leq 3$, 

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA



10. a) $a = 24$; b) $b = 70$; c) $c = 144$; d) $d = 24$; e) $x = 14$; f) $y = 9$;
g) $x = 0,5$; h) $x = 12$.

11. a) $e > 30$; b) $y \geq 40$; c) $x \leq 24$; d) $f > 2,4$; e) $x > 10$; f) $y \leq -4$;
g) $x \leq -1$; h) $x < 1\frac{26}{31}$.

12. $x = 2,8$. a) $\{2,8\}$; b) üres halmaz; c) üres halmaz.

13. $6 \leq 8$. a) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; b) pozitív természetes számok halmaza; c) természetes számok halmaza; d) egész számok halmaza.

14. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; b) $y_1 = -2$, $y_2 = -5$, $y_3 = 10$; c) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = -3$;
d) $b_1 = 0$, $b_2 = 8$, $b_3 = -30$, e) $c_1 = 3$, $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Szöveges feladatok

15. Az osztályba **18** lány és **13** fiú jár.

16. A gondolt szám **14**.

17. Az egyik kannában **14** liter, a másikban **7** liter víz van.

18. Az első dobozban **45**, a másodikban **90**, a harmadikban **15** labda van.

19. **8** ötödikes, **11** hatodikos, **16** hetedikos és **8** nyolcadikos gyerek jelentkezett a táborozásra.

20. A háromszög szögei **39° , 39° , 102°** .

21. A háromszög szögei **51° , 51° , 78°** .

22. A háromszög szögei a) **52° , 52° , 76°** ; b) **44° , 68° , 68°** .

ÉGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

23. A háromszög szögei a) 76° , 76° , 28° ; b) 44° , 44° , 92° .

24. A háromszög szögei 40° , 60° , 80° .

25. A két szám 8 és 20.

26. A sorban összesen 9 ember állt, Pali előtt állt 3 fő.

27. 25 évvel ezelőtt volt az apa kilencszer idősebb a fiánál.

28. Összesen 450 fabatkám volt, a ceruza 90 fabatkába került.

29. A két lécdarab 90 cm és 150 cm hosszú.

30. A téglalap területe 108 cm^2 .

31. A háromszög oldalai 9 dm, 5 dm és 12 dm hosszúak.

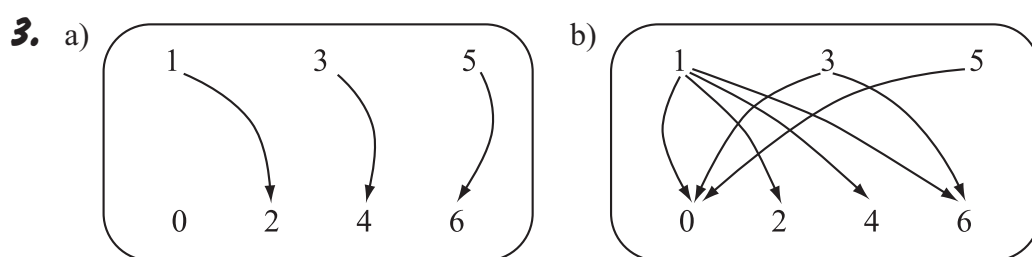
32. A legnagyobb szám 670.

33. A legkisebb szám 396.

34. Almából 5 kilogrammot, körtéből 3 kilogrammot vettem.

Függvények

- 1.** a) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
b) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
c) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
d) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
- 2.** a) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
b) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
c) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
d) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.
e) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
f) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.
g) Ez a hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek nincs párja a képhalmazban.
h) Ez a hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.



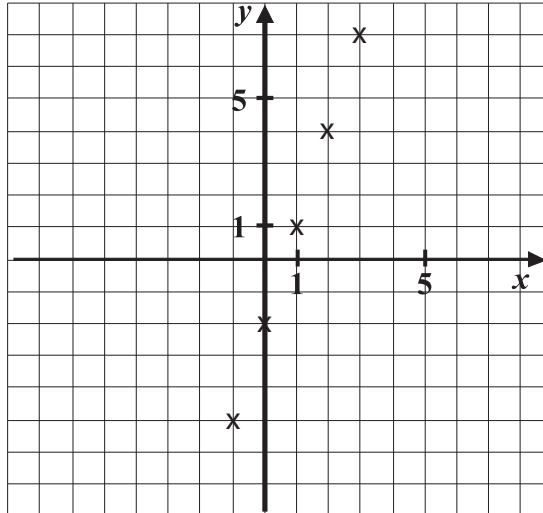
Az a) hozzárendelés függvény, mert az adatok minden elemének pontosan egy párja van a képhalmazban.

A b) hozzárendelés nem függvény, mert van olyan elem az alaphalmazban, amelynek több párja van a képhalmazban.

FÜGGVÉNYEK

4.

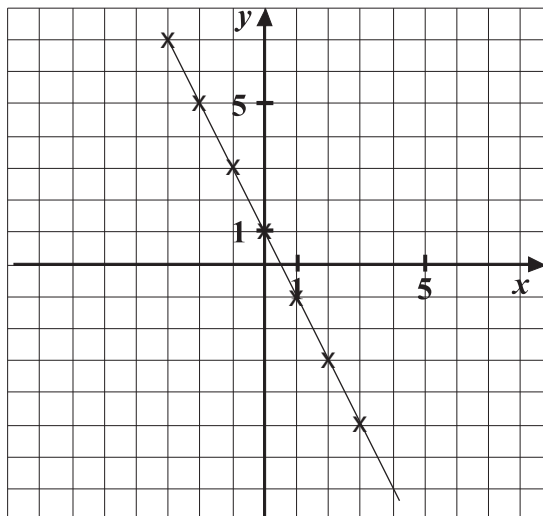
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 3x - 2$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10



5. $h(x) = \frac{1}{2}x + 1.$

x	-4	-2	0	2	4	6
$h(x)$	-1	0	1	2	3	4

6. $g(x) = -2x + 1.$



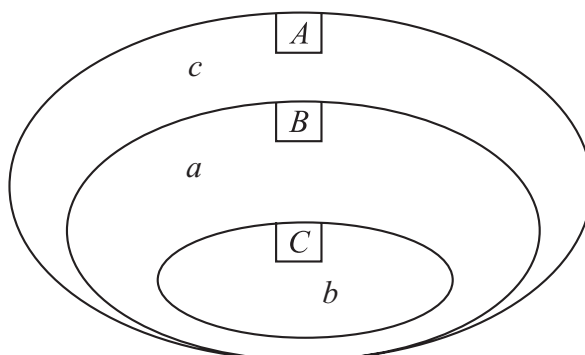
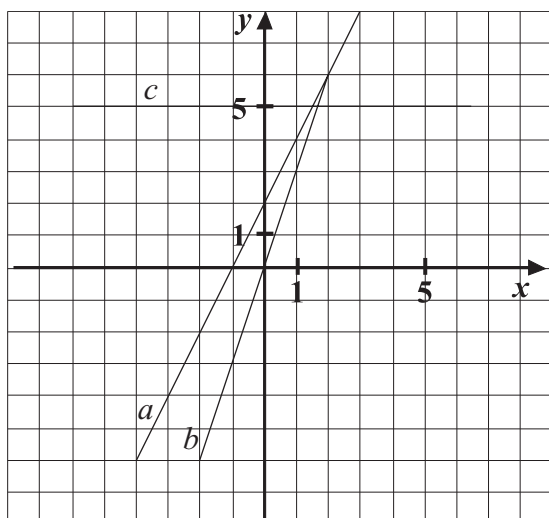
FÜGGVÉNYEK

7.

x	-1	0	1
$a(x)$	0	2	4

x	-1	0	1
$b(x)$	-3	0	3

x	-3	-2	-1
$c(x)$	5	5	5

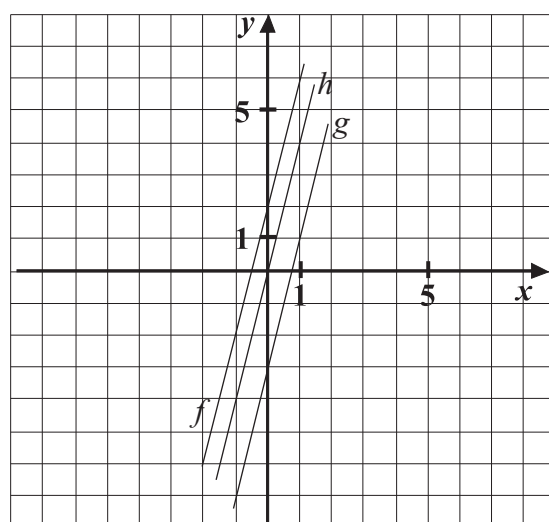


8.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-6	-2	2	6

x	-2	-1	0	1
$h(x)$	-8	-4	0	4

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	-11	-7	-3	1



Az egyenesek párhuzamos helyzetűek.

Merekségük azonos, de a koordinátatengelyeket más-más pontban metszik.

9. $f(x)$ meredekség: 2, $g(x)$ meredekség: $\frac{2}{3}$, $h(x)$ meredekség: -2, $i(x)$ meredekség: -6,

$k(x)$ meredekség: 2, $l(x)$ meredekség: $\frac{2}{3}$.

$f(x)$ grafikonja párhuzamos a $k(x)$ grafikonjával.

$g(x)$ grafikonja párhuzamos a $l(x)$ grafikonjával.

FÜGGVÉNYEK

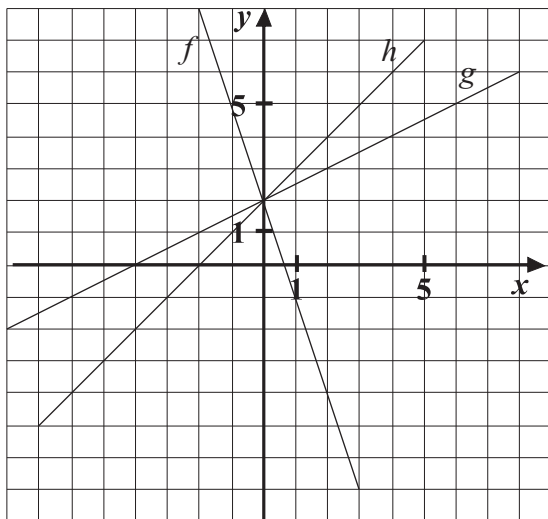
10. $a_1(x) = 4x,$ $a_2(x) = 4x + 5,$ $a_3(x) = 4x - 7,$
 $b_1(x) = -3x,$ $b_2(x) = -3x + 4,$ $b_3(x) = -3x + 1,$
 $c_1(x) = -\frac{3}{4}x + 2,$ $c_2(x) = -\frac{3}{4}x,$ $c_3(x) = -\frac{3}{4}x - 7.$

11.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	8	5	2	-1

x	-2	-1	0	1
$h(x)$	0	1	2	3

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	1	1,5	2	2,5

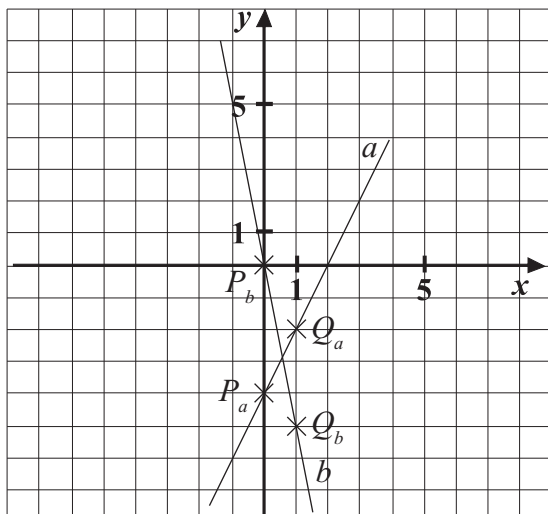


Mindhárom függvény közös pontja $(0; +2)$.

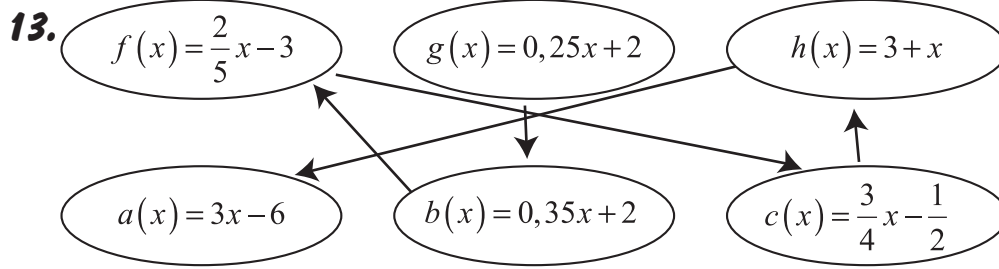
Mindhárom függvény lineáris, de meredekségük különböző.

A $h(x)$ függvény nagyobb szöget zár be az x tengellyel. A $h(x)$ függvénynek nagyobb a meredeksége.

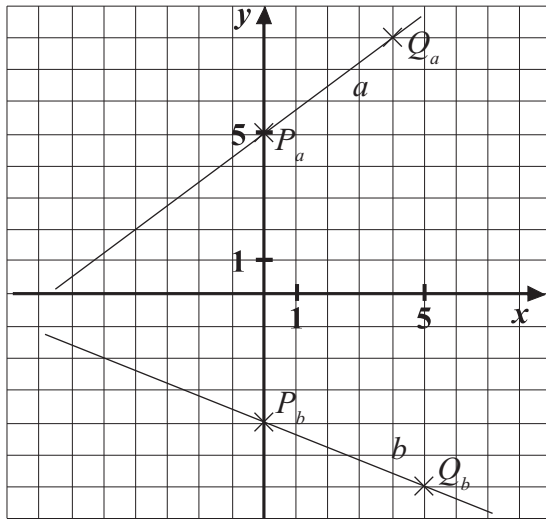
12. $P_a(0; -4),$ $Q_a(1; -2),$
 $P_b(0; 0),$ $Q_b(1; -5).$



FÜGGVÉNYEK



14. $P_a(0; 5), \quad Q_a(4; 8),$
 $P_b(0; -4), \quad Q_b(5; -6).$

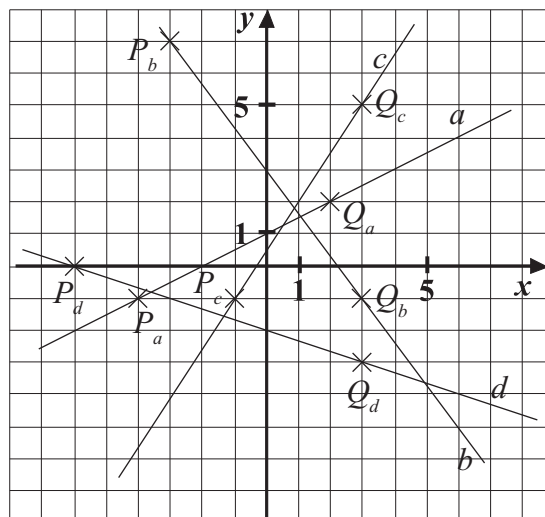


15. $a(x) = x + 4, \quad b(x) = -x + 2, \quad c(x) = -2, \quad d(x) = \frac{1}{3}x,$
 $e(x) = -\frac{3}{2}x - 4, \quad f(x) = \frac{2}{5}x + 3, \quad g(x) = \frac{3}{2}x, \quad h(x) = 4.$

16.

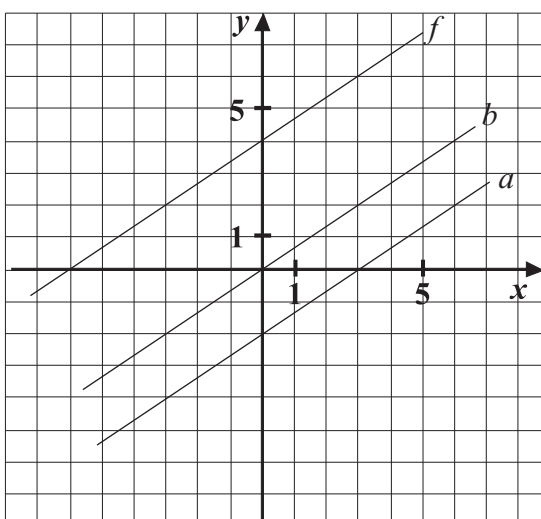
$$a(x) = \frac{1}{2}x + 1, \quad b(x) = -\frac{4}{3}x + 3,$$

$$c(x) = 1,5x + 0,5, \quad d(x) = -\frac{1}{3}x - 2.$$

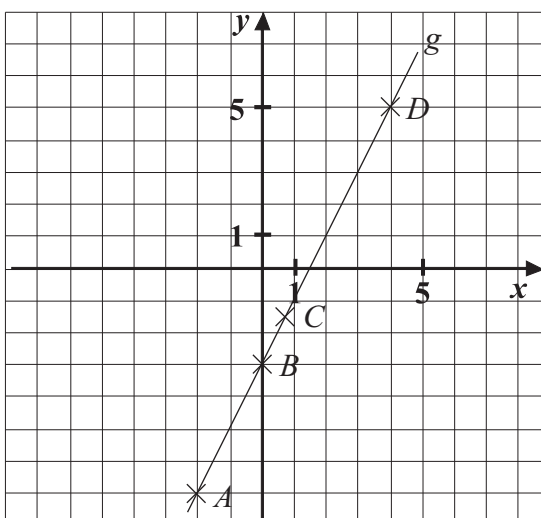


FÜGGVÉNYEK

17. $a(x) = \frac{2}{3}x - 2,$
 $b(x) = \frac{2}{3}x.$

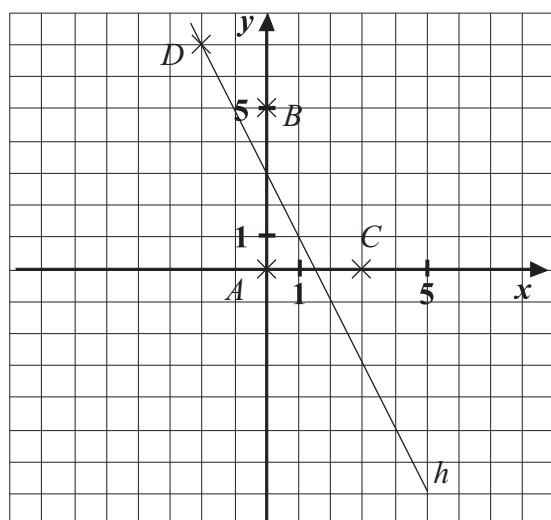


18. $A(-2; -7),$
 $B(0; -3),$
 $C\left(\frac{3}{4}; -1,5\right),$
 $D(4; 5),$
 $E(15; 27).$



19.

x	-2	-1	-0,5	1,5	1,5	4	3	-4
$h(x)$	7	5	4	0	0	-5	-3	11



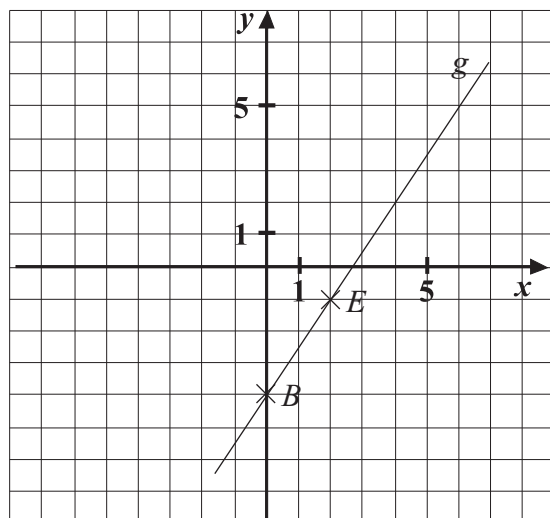
Alatta: $A, E.$

Rajta: $D, F.$

Fölötte: $B, C, G, J, K.$

FÜGGVÉNYEK

20.



a) $A(-3; -8,5), B(0; -4), C(12; 14),$

$D\left(\frac{8}{3}; 0\right), E(2; -1), F(10; 11);$

b) $A_a(-3; -10), B_a(0; -6), C_a(12; 10),$

$D_a(3; 0), E_a(4; -1), F_a(15; 11);$

c) $A_f(-3; -0), B_f(0; 0), C_f(12; 20),$

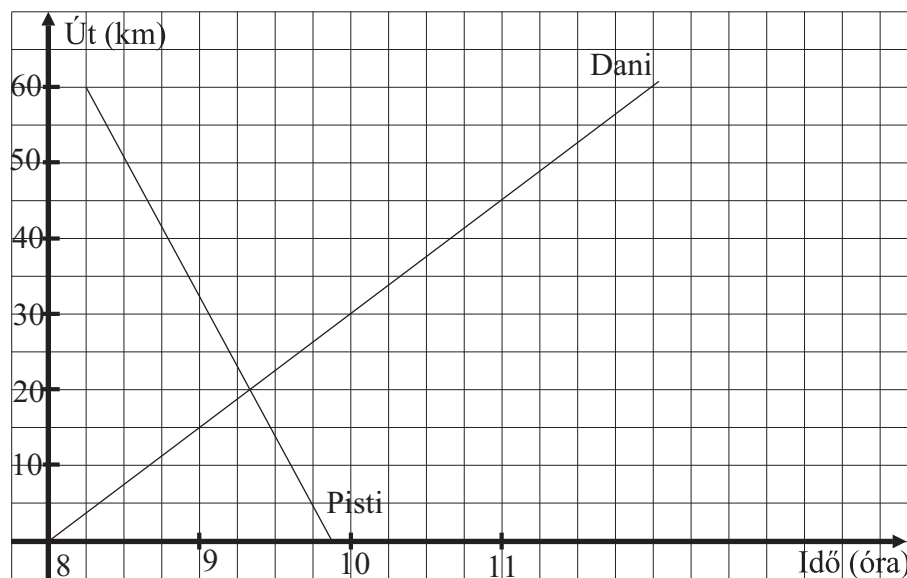
$D_f(2; 0), E_f(1; -1), F_f(2; 11).$

21. a) $a(x) = 3x;$ b) $b(x) = \frac{1}{3}x;$ c) $c(x) = 4x + 2;$ d) $d(x) = \frac{1}{4}x + 2;$

e) $e(x) = -2x + 3;$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3;$ g) $g(x) = -3x - 4;$ h) $h(x) = -\frac{1}{3}x - 4$

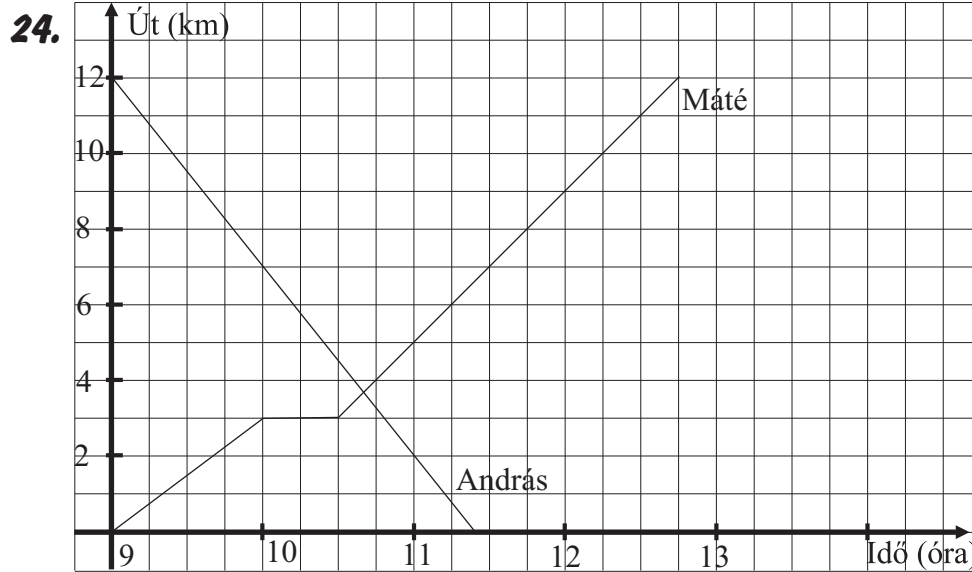
22. I, H, I, H, H, H, H.

23.



A két jármű **9 óra 20 perckor** találkozott, a kerékpáros kiindulási helyétől **20 kilométer** távolságban.

FÜGGVÉNYEK



A két barát **10 óra 40 perckor** találkozott, **András** tett meg hosszabb utat.

25.1. grafikon:

Mindkét gyalogos egyszerre (a 0. órában) indult el.

Egymástól 40 km távolságra voltak.

8 óráig tartott az útjuk.

Az *a* gyalogos tartott pihenőt. A pihenő 120 percig tartott.

5 órákor találkoztak az *a* indulási helyétől 15 km-re, és a *b* indulási helyétől 25 km-re.

A sebesség a pihenés után volt nagyobb.

2. grafikon:

Az *a* gyalogos a 0. órában, a *b* gyalogos 30 perccel később indult el.

3 óráig tartott az útjuk.

A *b* gyalogos nem tartott pihenőt.

A *b* gyalogosnak nagyobb volt az átlagsebessége.

2 óra 10 perckor találkoztak az indulási helytől kb. 6 km távolságban.

Sorozatok

26.a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17;

b) 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 33, 41;

c) -1, 2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79;

d) 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80;

e) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511.

27.a) 2, 6, 18, 54, 162, 486;

b) 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$;

c) -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18;

d) 23, 16, 9, 2, -5, -12, -19;

e) $-\frac{1}{30}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{56}{10}$, $\frac{173}{10}$, $\frac{524}{10}$, $\frac{1576}{10}$.

FÜGGVÉNYEK

28. a) 12, 7, 2, -3, -8, -13, -18;

b) nem számtani sorozat;

c) nem számtani sorozat;

d) 0,9, 1,6, 2,3, 3, 3,7, 4,4, 5,1;

e) nem számtani sorozat;

f) -154, -131, -108, -85, -62, -39, -16;

g) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}$;

h) $\frac{1}{4}, -\frac{5}{12}, -1\frac{1}{12}, -\frac{21}{12}, -\frac{29}{12}, -\frac{37}{12}, -\frac{45}{12}$.

29. a) 7, 15, 23, 31, 39, 47; b) 162.

30. 7,4, 5,8, 4,2, 2,6, 1, -0,6.

31. $a_{25} = 317, S_{25} = 4025$.

32. $a_{25} = -892, S_{25} = -23772$.

33. $a_{20} = 14\frac{13}{20}, S_{20} = 15\frac{1}{20}$.

34. $a_{20} = -23,6, S_{20} = -187$.

35. $a_{42} = 257,5, S_{42} = 5304,6$.

36. $a_1 = -30, S_{10} = -30$.

37. $a_1 = 0,15, S_{65} = 529,75$.

38. $a_1 = \frac{3}{7}, S_{25} = 110\frac{5}{7}$.

39. $a_1 = 9, d = 7, S_{10} = 405$.

40. $a_{13} = -20, d = -3, S_{10} = -49$.

A 12. és a 14. elem átlaga a -20, amely megadja a 13. elemet.

FÜGGVÉNYEK

41. $a_1 = 205$, $d = 7$, $a_{100} = 898$, $S_{10} = 55150$.

42. A keresett összeg **1683**.

43. A keresett összeg **1188**.

44. A keresett összeg **999**.

45. A keresett összeg **82350**.

46. a) A háromszög oldalai **7 cm, 12 cm, 17 cm**. b) A megoldások száma **6**.

47. A négyszög szögei **39° , 60° , 81°** .

48. A körök mentén összesen **147** gyerek állt.

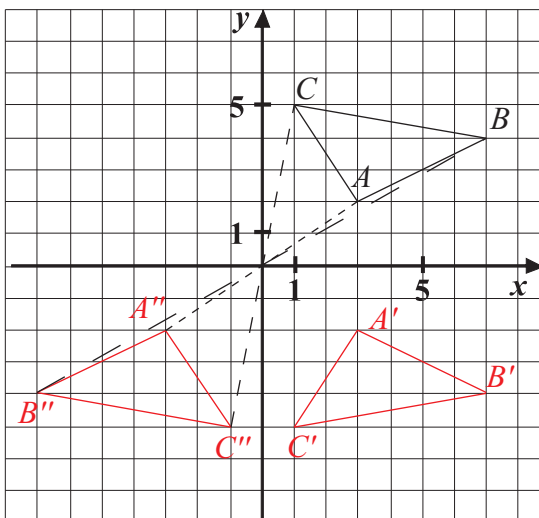
49. A két fiú közül **Béla** spórol több pénzt, **80** forinttal. A társasjáték **5520** forintba kerül.

50. A piramis területe **$40,5 \text{ cm}^2$** .

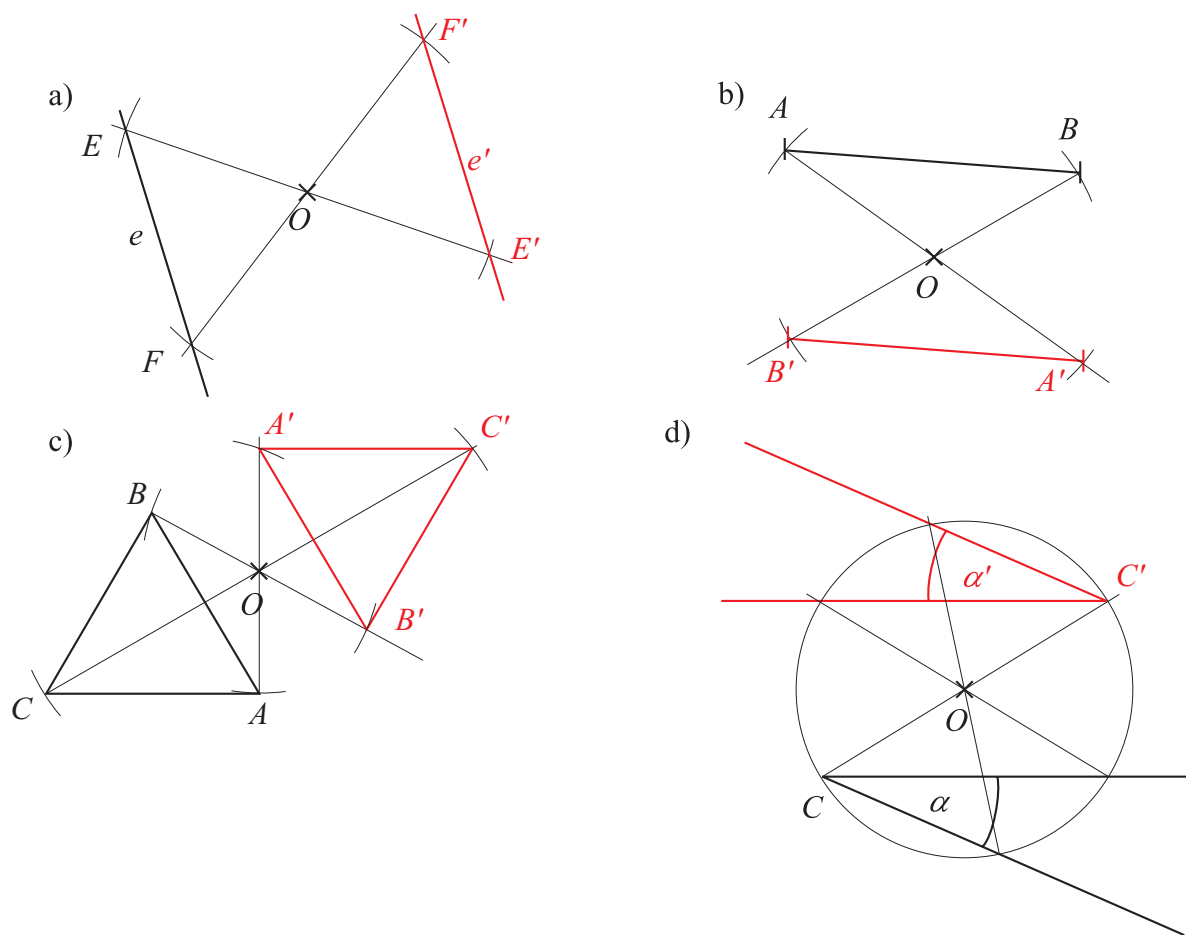
Geometriai transzformációk

Középpontos tükrözés

1. A szakaszok egy pontban az origóban metszik egymást. Ez a pont mindhárom szakasz felező pontja.

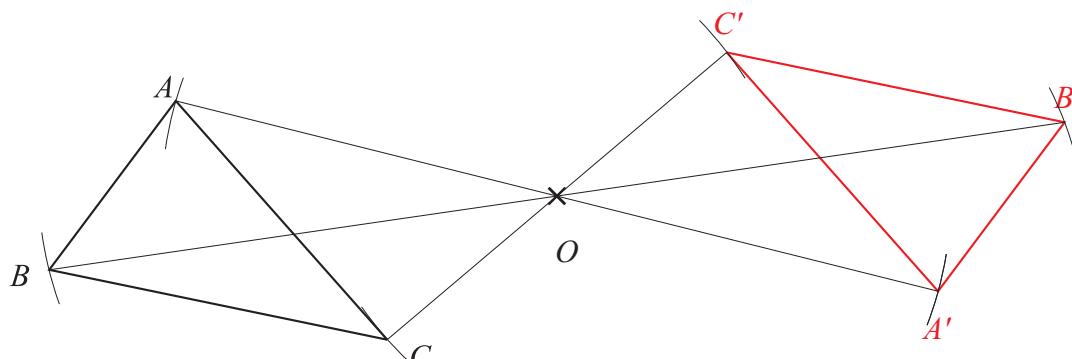


2.



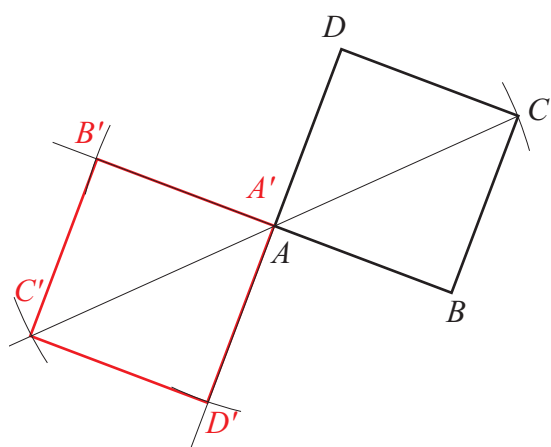
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

3.

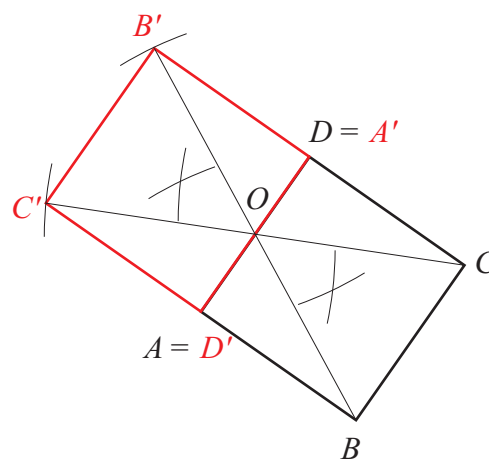


4.

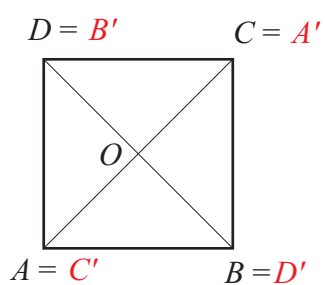
a)



b)



c)



d) Szakasz és tükörképe **egyenlő** hosszúságú.

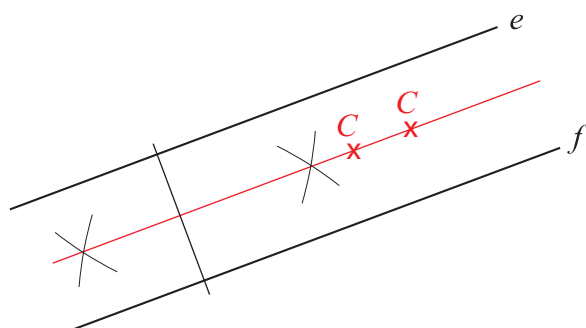
Szakasz és képe **párhuzamos** helyzetű.

Szög és képe **egyenlő** nagyságú.

Alakzatnak és képének **megegyezik** a körüljárási iránya.

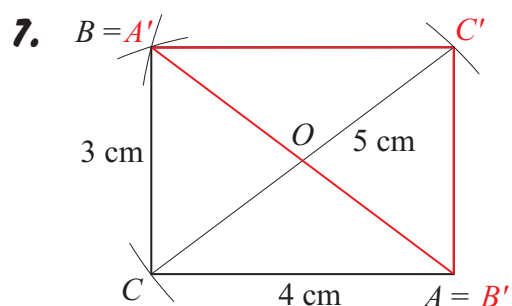
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

5.



A középpárhuzamos bármely pontja lehet C .
A feladatnak **végtelen sok** megoldása van.

6. a) H; b) I; c) I; d) H; e) I; f) H; g) I.



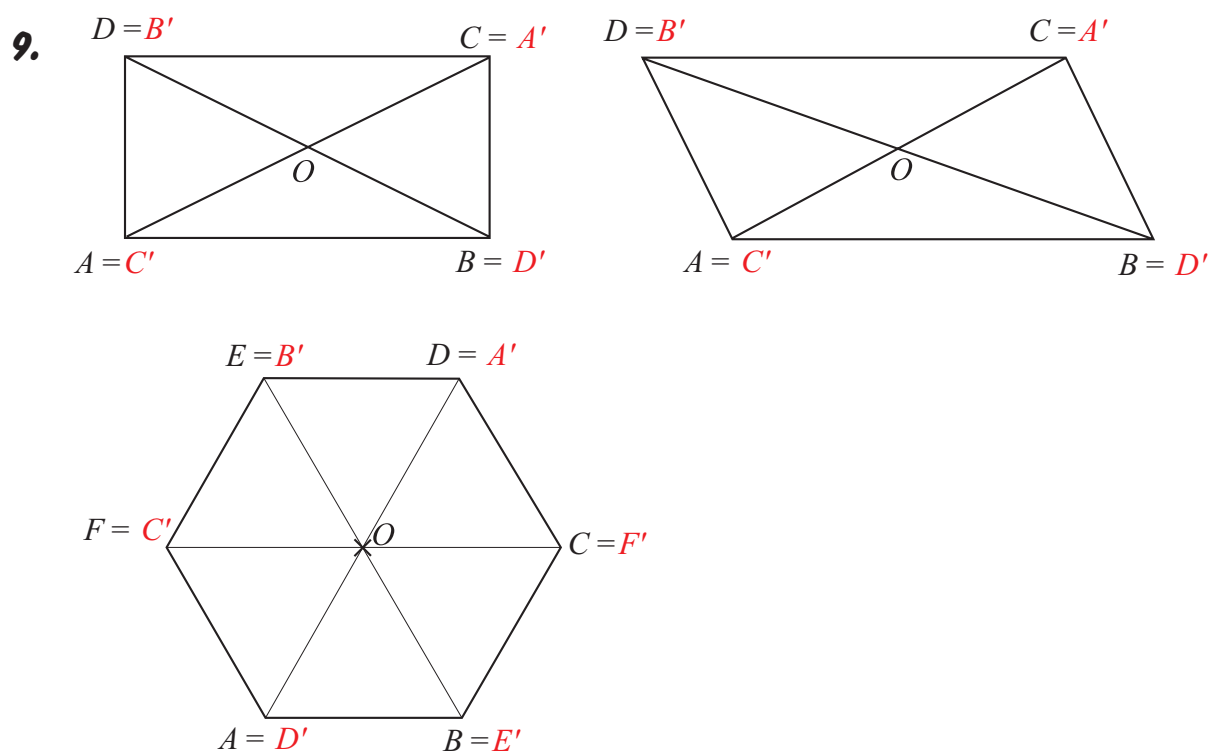
A két alakzat együttesen **téglalapot** alkot.

A tengelyes és középpontos tükrözés összehasonlítása

8. Megegyező tulajdonságok: szögtartó, távolságtartó, van fix pont (k : O , t : a tengely bármely pontja)
Eltérő tulajdonságok: a körüljárási irány változik (t) nem változik (k), van fix egyenes (t), csak fix pont van (k),

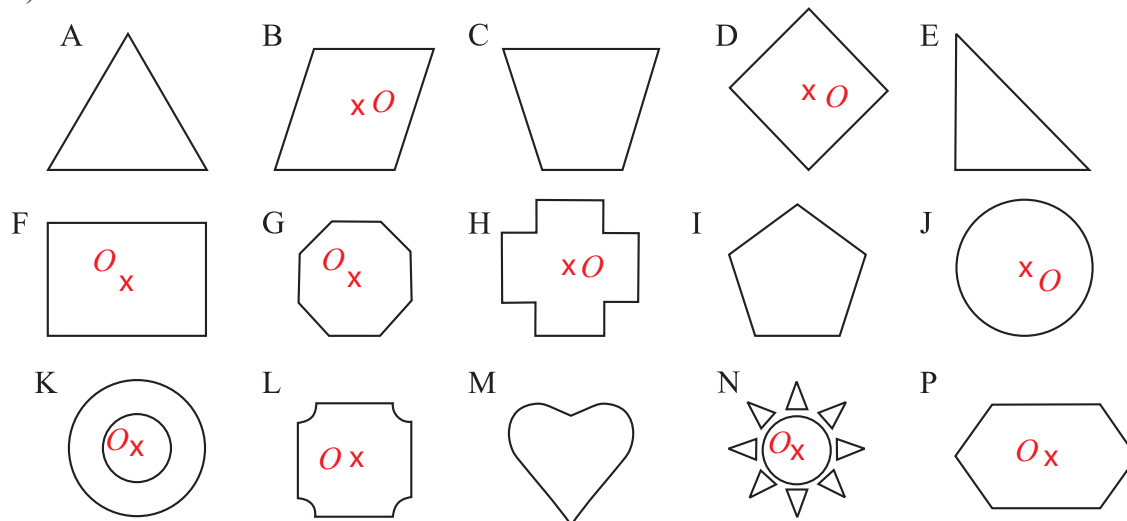
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Középpontos szimmetria



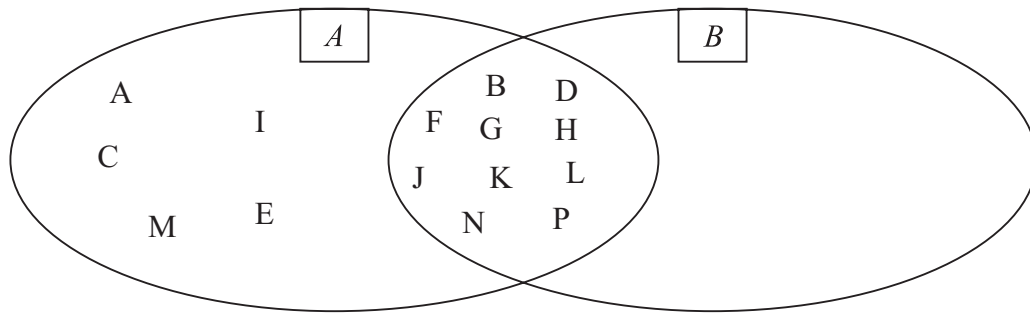
Mind a három alakzat önmagának a tükörképe. Ezek középpontosan szimmetrikus alakzatok.

10.a)



b)

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK



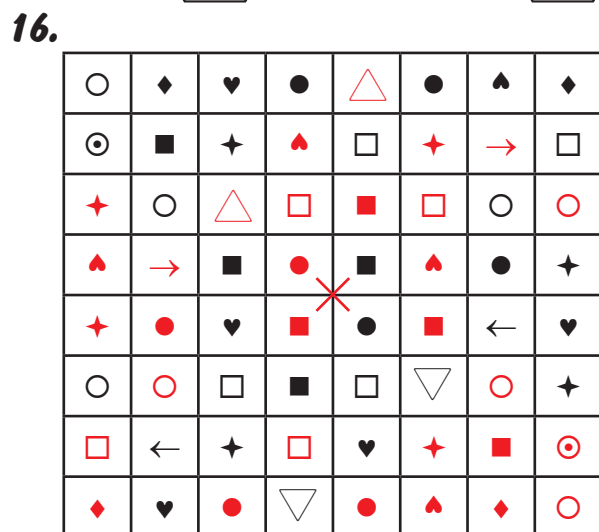
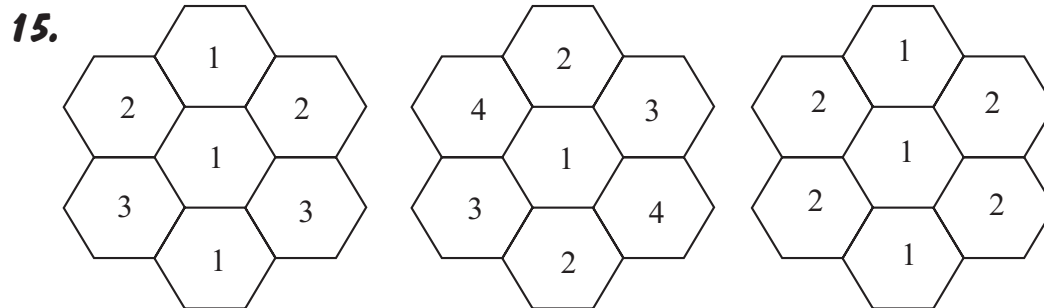
11.a) I; b) H; c) I; d) H; e) H; f) I; g) H.

Párhuzamos szárú szögek

12.a) 4, 8, 12; b) 3, 6, 10, 14; c) 3; d) 1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15; e) 1, 2.

13.a) H; b) I; c) H; d) I; e) I; f) I.

14. $\delta = 43^\circ$; $\beta = 43^\circ$; $\varepsilon = 86^\circ$; $\Phi = 94^\circ$; $\varphi = 94^\circ$; $\gamma = 86^\circ$; $\eta = 94^\circ$; $\lambda = 43^\circ$; $\omega = 86^\circ$.



Sokszögek

Háromszögek

1. a) 3 centiméter $< c < 11$ centiméter



b) 1,5 centiméter $< c < 8,5$ centiméter



2. $\gamma = 72^\circ$; $\alpha = 79^\circ, \beta = 46^\circ$; $\alpha = 75^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 65^\circ$.

3. A háromszög harmadik szöge 54° .

Ez a háromszög **hegyes** szögű egyenlő **szárú** háromszög.

4. $\beta = 36^\circ, \gamma = 108^\circ$.

5. $\alpha = 72^\circ, \beta = 72^\circ$.

6. $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ vagy $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$.

7. a) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor van két egyenlő **szöge is**.

b) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor van két egyenlő **oldala**.

c) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor az **egyenlő szárú** háromszög.

d) Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor az **egyenlő szárú** háromszög.

e) Ha egy háromszögnek minden szöge egyenlő, akkor oldalai **egyenlő** hosszúak.

f) Ha egy háromszögnek minden oldala ugyanolyan hosszúságú, akkor szögei **egyenlőek**.

g) Ha egy háromszögnek minden oldala ugyanolyan hosszúságú, akkor az **egyenlő oldalú** háromszög.

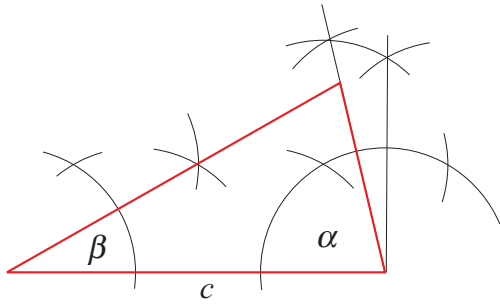
h) Ha egy háromszögnek minden szöge egyenlő, akkor az **egyenlő oldalú** háromszög.

i) Bármely háromszögben a leghosszabb oldallal szemközt van a **legnagyobb** szög.

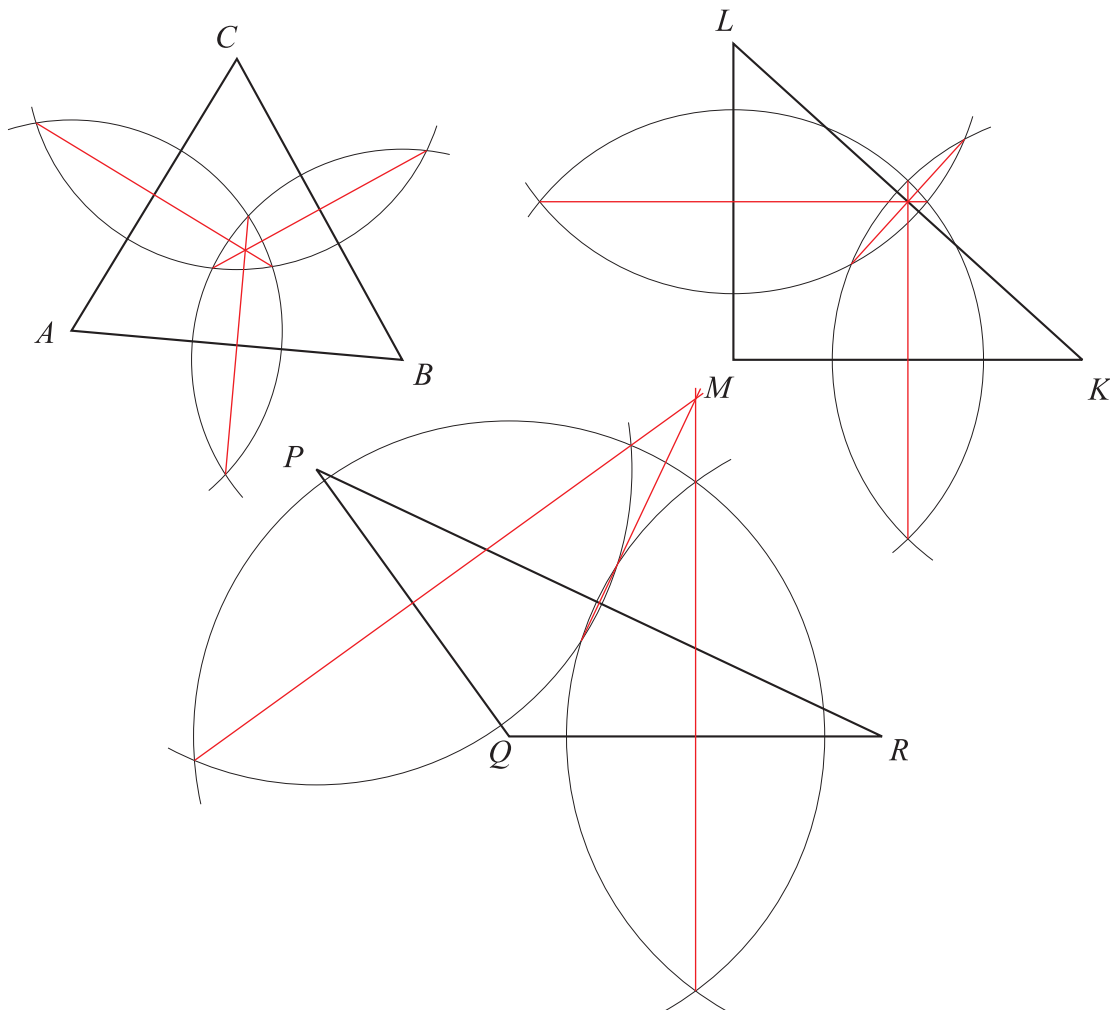
j) Bármely háromszögben a legnagyobb szöggel szemközt van a **leghosszabb** oldal.

SOKSZÖGEK

8.



9.



A háromszög oldalfelező merőlegesei **egy pontban** metszik egymást.

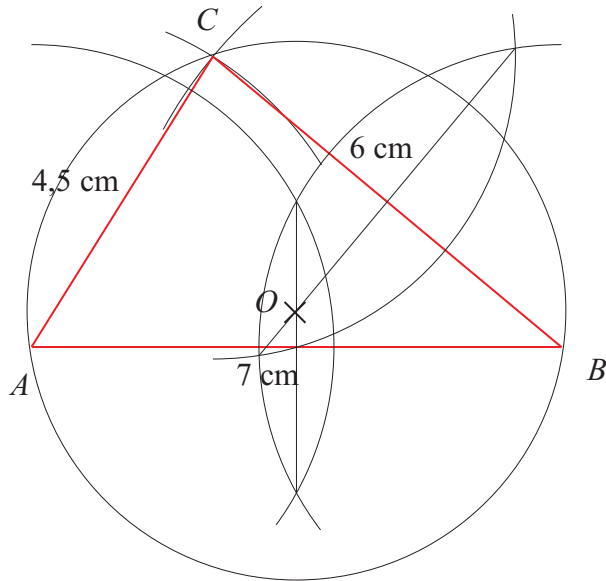
A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom **csúcsától** ezért ez a pont a háromszög **köré** írható körének a középpontja.

A háromszög csúcsain átmenő kör középpontja:

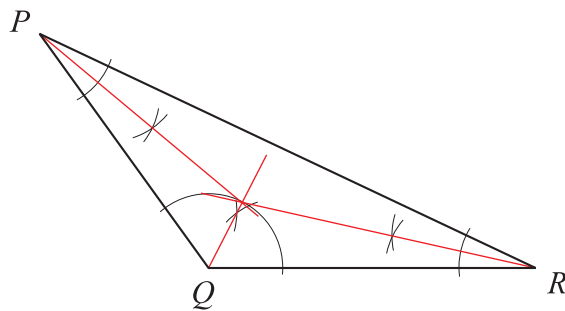
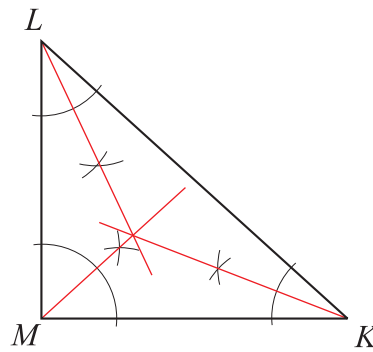
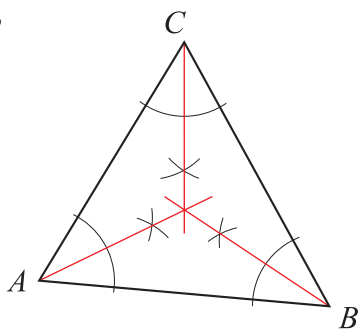
- hegyesszögű háromszögnél **a háromszög belsejében**,
- derékszögű háromszögnél **az átfogó felezőpontján**,
- tompaszögű háromszögnél **a háromszögön kívül** található.

SOKSZÖGEK

10.



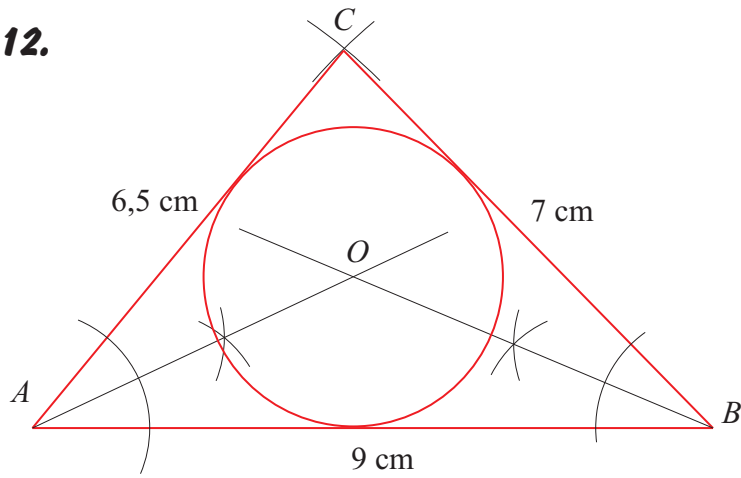
11.



A háromszög belső szögfelezői **egy pontban** metszik egymást.
 A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom **oldalegyenesétől**, ezért ez a pont a háromszög **beírható** körének a középpontja.

SOKSZÖGEK

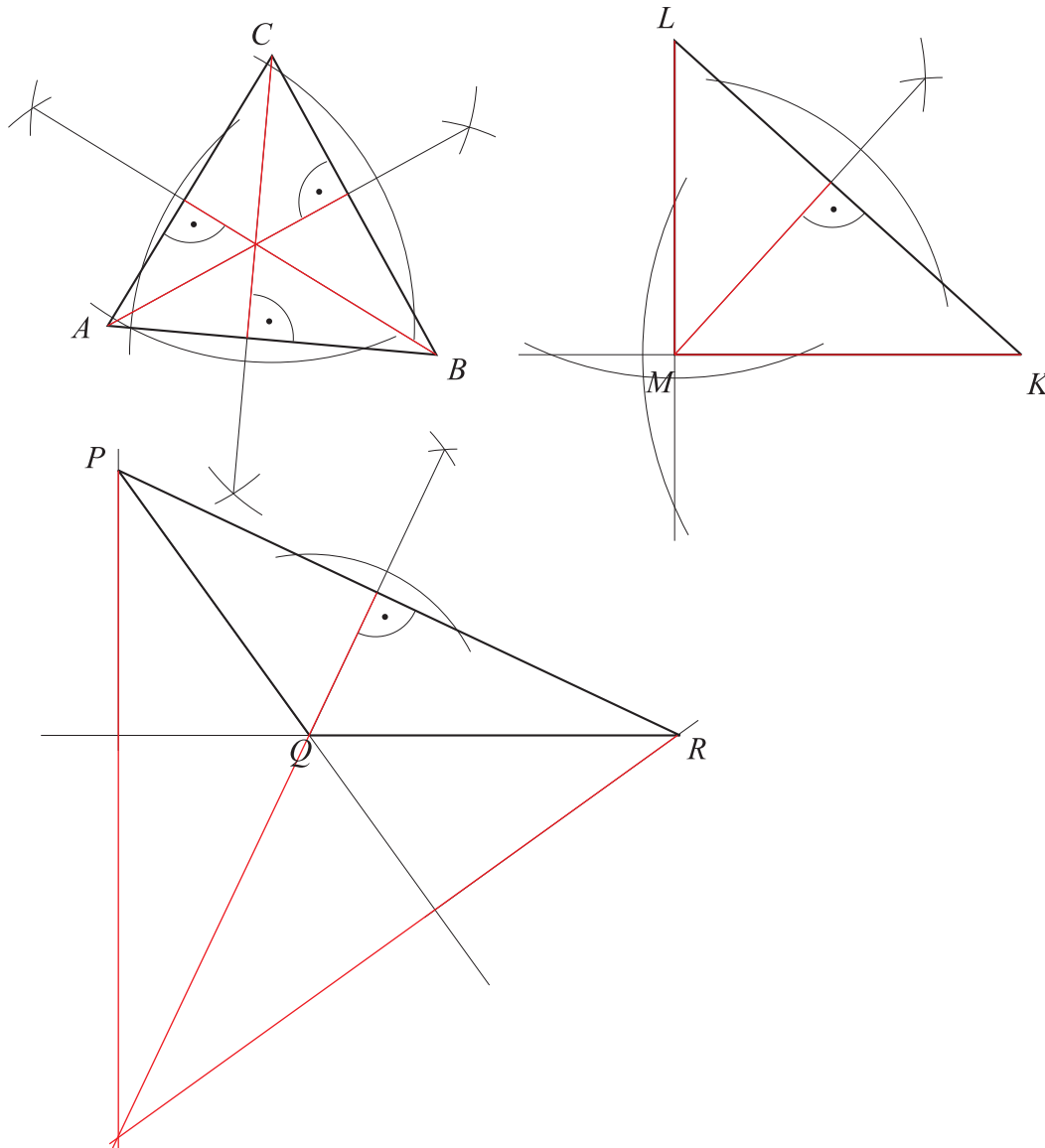
12.



13. $\varphi = 61^\circ$, $\varphi = 70^\circ$.

14. $\gamma = 68^\circ$.

15.

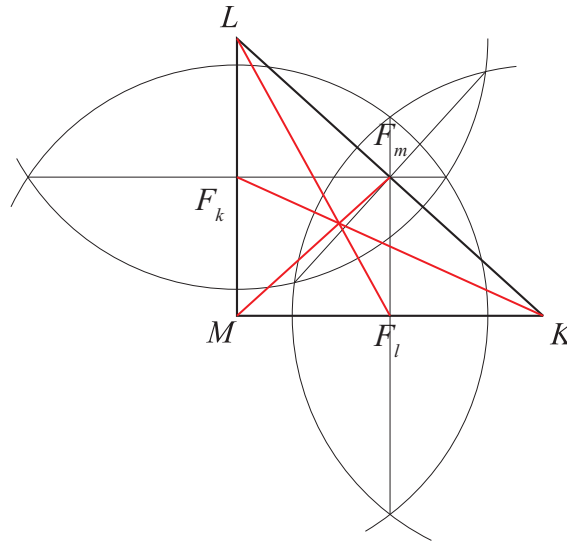
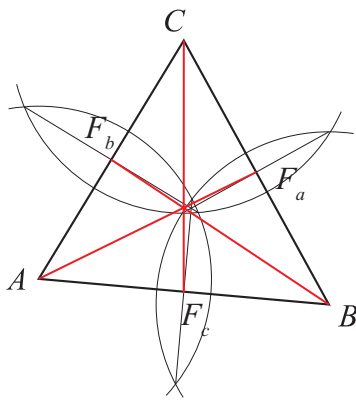


SOKSZÖGEK

- A háromszög magasságvonalai **egy pontban** metszik egymást.
 A háromszög magasságvonalainak metszéspontja a magasságpont, amely a
- hegyesszögű háromszögnél **a háromszög belsejében**,
 - derékszögű háromszögnél **a derékszögnél**,
 - tompaszögű háromszögnél **a háromszögön kívül** található.

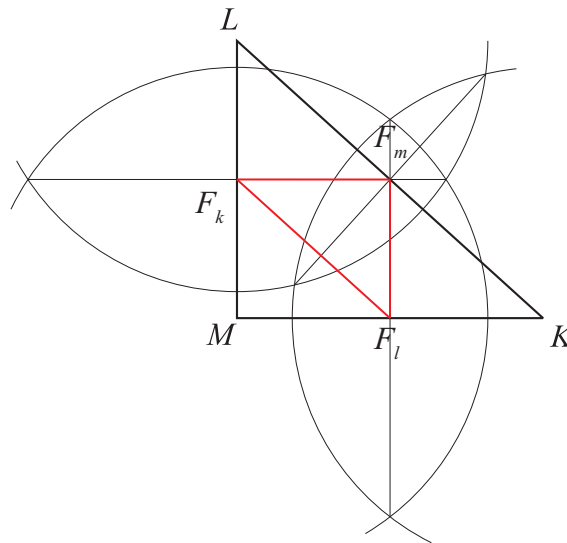
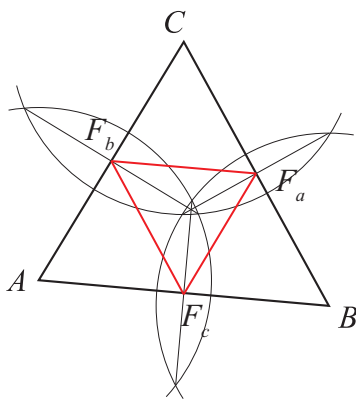
16. $\varepsilon = 49^\circ$, $\delta = 40^\circ$.

17.



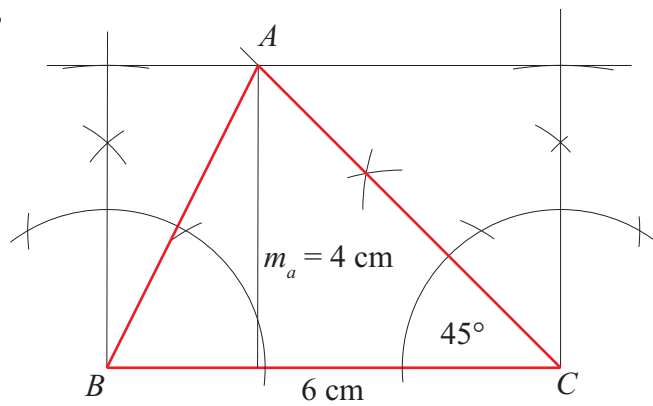
A háromszög súlyvonalai **egy pontban** metszik egymást. A háromszög súlyvonalainak metszéspontja a **súlypont**.

18.

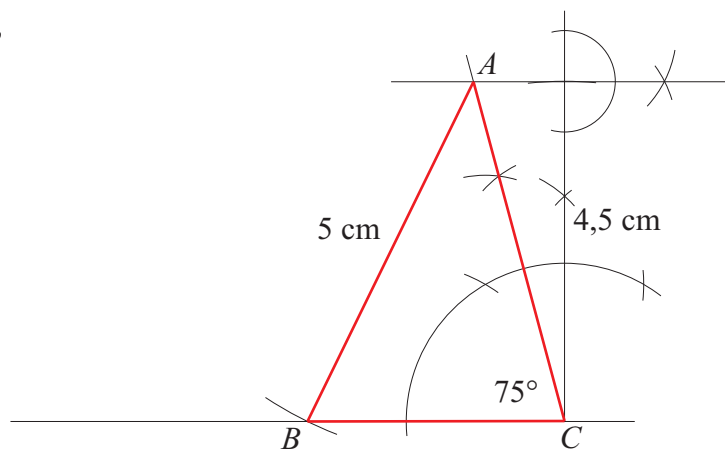


SOKSZÖGEK

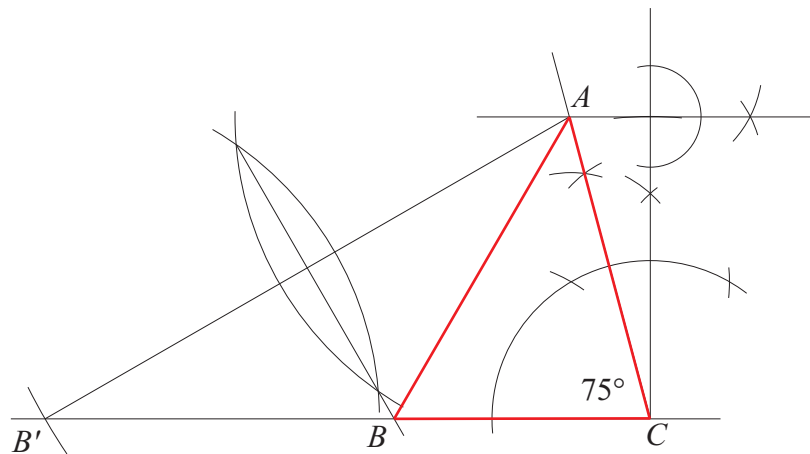
19.



20.



21.



22. a) $T_a = 30 \text{ cm}^2$; b) $T_b = 9,8 \text{ dm}^2$; c) $T_a = \frac{3}{20} \text{ m}^2$; d) $T_b = 16,5 \text{ cm}^2$.

SOKSZÖGEK

23.

A háromszög egyik oldala	8 cm	4,8 cm	12 cm	3,2 cm	24 cm	36 cm
A fenti oldalhoz tartozó magasság	6 cm	10 cm	4 cm	15 cm	2 cm	$\frac{4}{3}$ cm

Állandó terület mellett az egyik oldal hossza és a hozzá tartozó magasság között **fordított** arányosság van.

24. $T_{ABC} = T_{ABD}$

Indoklás:

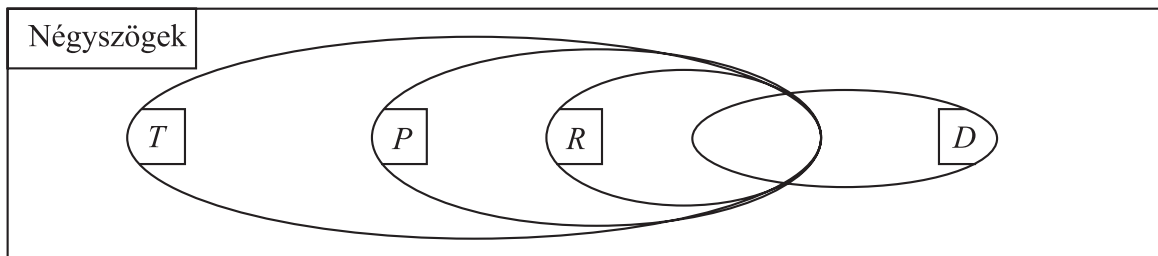
A közös oldal az AB szakasz. Mivel $AB \parallel DC$ ezért az AB szakasz egyenesének ugyanakkora a távolsága a D és C pontoktól, ezért a két háromszög AB oldalhoz tartozó magassága egyenlő hosszúságú.

25. $K = 18$ cm, $T = 13,5$ cm².

Az átfogóhoz tartozó magasság **3,6** centiméter.

Négyszögek

- 26.** a) a, c, d, f, g, i, j;
 b) a, e, h, i, j;
 c) a, d, g, j;
 d) a, c, d, e, g, h, j;
 e) j;
 f) a, c, d, e, g, h, j;
 g) a, j;
 h) a, c, e, h, j;
 i) e, h, j;
 j) a, c, j;
 k) e, h, j;
 l) a, d, g, j;
 m) a, j;



SOKSZÖGEK

- 27.** Az olyan négyszöget, amelynek van párhuzamos oldalpárja, **trapéz**nek nevezzük.
 A középpontosan szimmetrikus négyszögeket **paralelogrammának** nevezzük.
 A húrtrapézok olyan négyszögek, amelyeknek a szimmetria tengelyük **oldalfelező pontokon** halad keresztül.
 A deltoidoknak van **csúcson** áthaladó szimmetria tengelyük.
 Minden négyzet **deltoid (paralelogramma)**.
 Minden rombusz **paralelogramma (trapéz)**.
 Van olyan paralelogramma, amely **rombusz**.
 A téglalap egyenlő szögű **paralelogramma**.
 A **négyzet** átlói merőlegesek egymásra, és egyenlő hosszúak.

28. I, I, H, H, I, I, I, H, H, H, I.

29. $\beta = 127^\circ$, $\gamma = 53^\circ$, $\delta = 127^\circ$;

$$\alpha = 65^\circ, \beta = 115^\circ, \gamma = 65^\circ, \delta = 115^\circ;$$

$$\alpha = 55^\circ, \beta = 164^\circ, \gamma = 16^\circ.$$

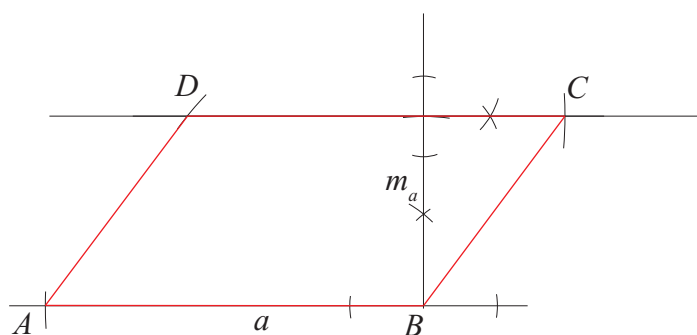
30. a) $\beta = 73^\circ$, $\delta = 122^\circ$;

b) $\alpha = 39^\circ$, $\beta = 66^\circ$, $\gamma = 141^\circ$, $\delta = 114^\circ$;

c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 150^\circ$;

d) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 70^\circ$, $\delta = 110^\circ$.

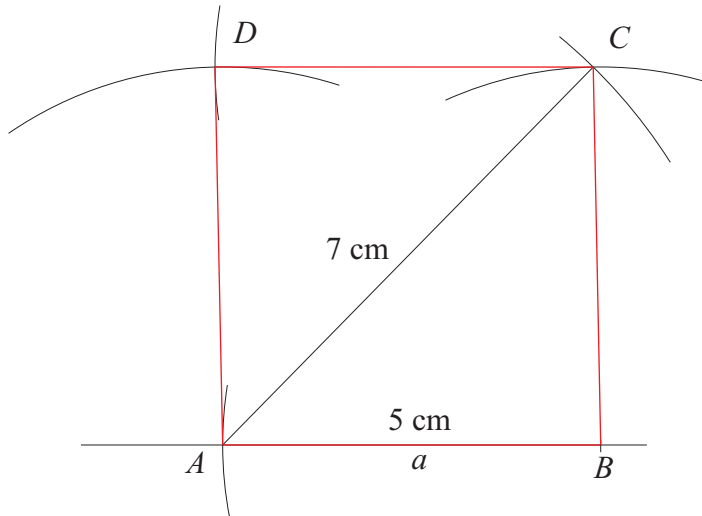
31.



32. Nincs megoldás.

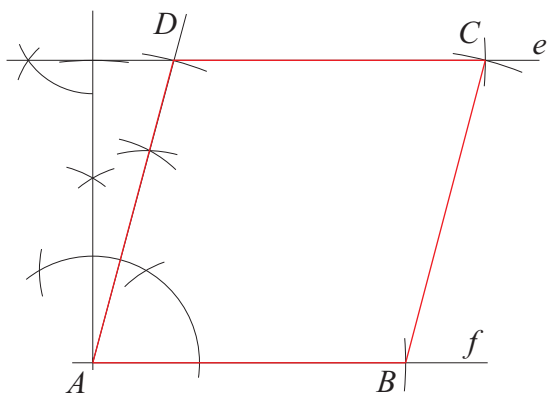
33. Szerkesztés menete:

1. ABC háromszög megszerkesztése (5 cm; 5 cm; 7 cm) oldalakkal.
2. C középpontú 5 cm sugarú körív rajzolása.
3. A középpontú 5 cm sugarú körív rajzolása.
4. A körívek metszéspontja a D csúcs.



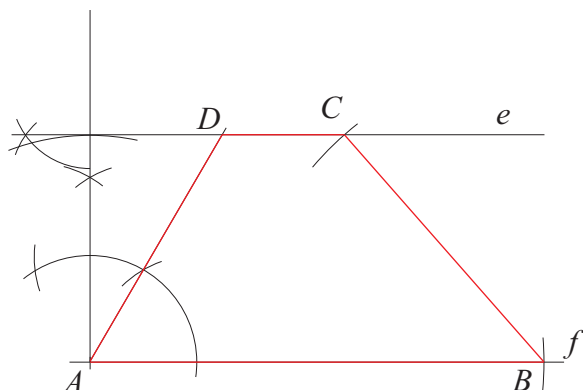
34. Szerkesztés menete:

1. Két, egymástól 4 cm távolságra lévő párhuzamos egyenes szerkesztése (e ; f).
2. Az f egyenes tetszőleges pontja A csúcs.
3. A pontba 75° -os szög szerkesztése.
4. A szög szár és az e egyenes metszéspontja a D csúcs és ezzel adott lesz az AD szakasz hossza.
5. D középpontú AD sugarú körív és e metszéspontja a C csúcs.



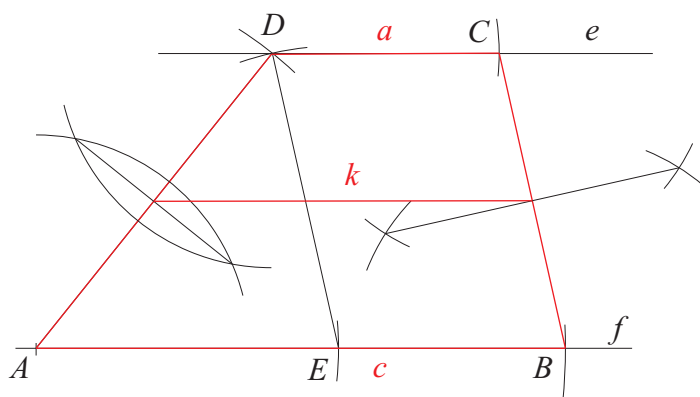
35. Szerkesztés menete:

1. e és f egymással párhuzamos, egymástól 3 cm távolságban lévő egyenespár szerkesztése.
2. A pont f egyenes egyik pontja.
3. A pontra 60° -os szög szerkesztése.
4. A szög szár és e metszéspontja a D csúcs.
5. B középpontú, 4 cm sugarú körív és e metszéspontja a C csúcs.



36. Szerkesztés menete:

1. AED háromszög szerkesztése (4 cm, 4 cm, 5 cm).
2. AE meghosszabbítása E -n túl, amelyen 3 cm távolságban B csúcs kijelölése.
3. D csúcson át párhuzamos szerkesztése az AB szakasszal (f).
4. B középpontú, 4 cm sugarú körív és f metszéspontja a C csúcs.



A középvonal hossza: **5 cm**. $k = \frac{a+c}{2}$

37. a) 45 cm^2 ; b) 12 dm^2 ; c) $0,06 \text{ m}^2$; d) $6,2 \text{ dm}^2$.

38. a) $K = 21 \text{ cm}$; b) $m_a = 4 \text{ cm}$, $m_b = 3 \text{ cm}$.

39. a) $a = 12 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$; b) $K = 56 \text{ cm}$.

SOKSZÖGEK

40. a) $T_a = 12,5 \text{ cm}^2$; b) $T_b = 6,3 \text{ dm}^2$; c) $T_c = 192,5 \text{ cm}^2$.

41.

a	c	m	T
13 cm	8 cm	4 cm	42 cm^2
9,6 cm	54 mm	3,6 cm	27 cm^2
6,4 dm	4,6 dm	2,4 dm	$13,2 \text{ dm}^2$

42. $T_{ADFG} = 24 \text{ cm}^2$; $T_{DBEF} = 19 \text{ cm}^2$; $T_{GEC} = 27 \text{ cm}^2$.

Szabályos sokszögek

43. a) 1800° ; b) 150° ; c) 30° ; d) 54.

44. a) 2340° ; b) 156° ; c) 24° ; d) 90.

45. a) 3240° ; b) 18° ; c) 162° ; d) 170.

46. a) 8; b) 135° ; c) 20; d) 45° .

47. a) 12; b) 150° ; c) 54; d) 30° .

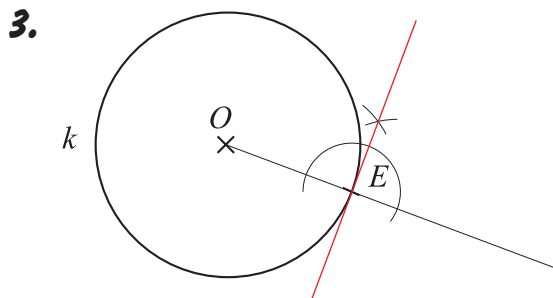
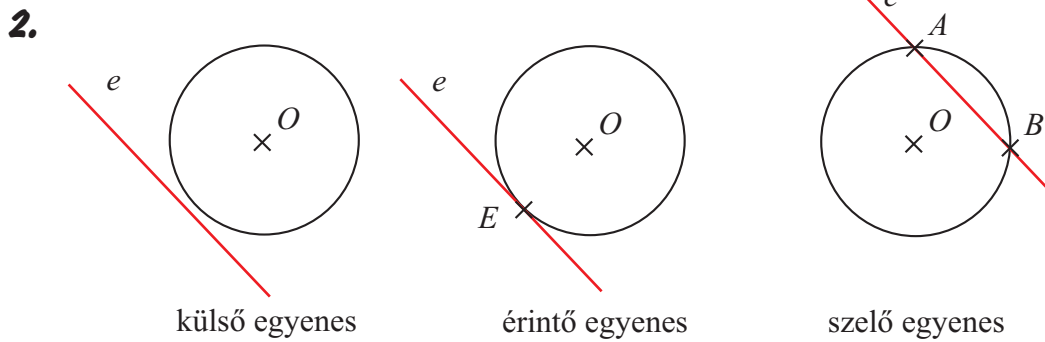
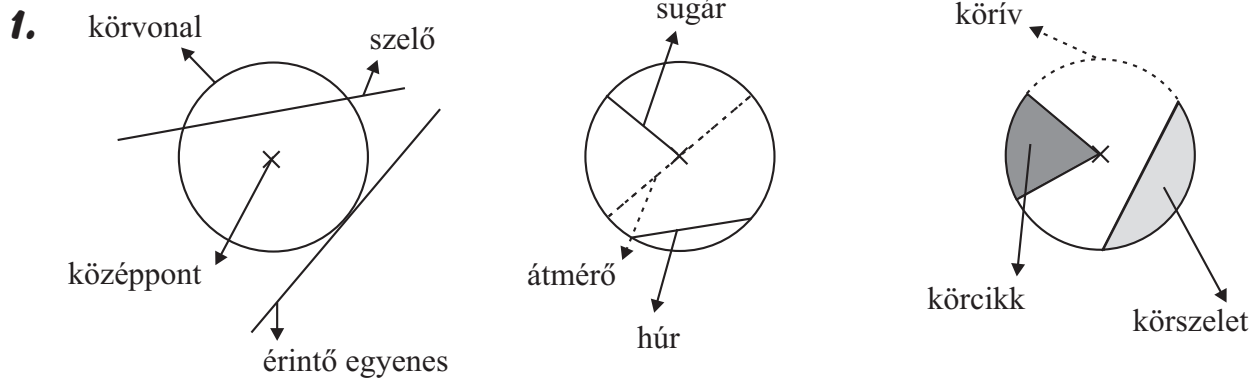
48. a) 9; b) 15; c) 18.

49. a) 9; b) 17; c) 21; d) 25.

50. $T_{BDKH} = 40 \text{ cm}^2$; $T_{ABHG} = 24 \text{ cm}^2$; $T_{BCD} = 22,75 \text{ cm}^2$; $T_{ABCDEFG} = 150,75 \text{ cm}^2$.

51. $T_{ABFE} = 45 \text{ cm}^2$; $T_{FCDE} = 32 \text{ cm}^2$; $T_{BCF} = 35 \text{ cm}^2$; $T_{ABCD} = 112 \text{ cm}^2$.

A kör



Az érintési pontba húzott sugár és az érintő egyenes mindig **merőleges** helyzetű.

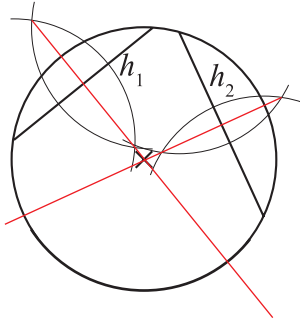
4. $h_1 < h_2$, $i_1 < i_2$, $h_2 = h_3$, $i_2 = i_3$.

Egyenlő sugarú körökben nagyobb középponti szöghöz **hosszabb** húrok és **hosszabb** ívek tartoznak.

Egyenlő sugarú körökben egyenlő középponti szöghöz **egyenlő hosszúságú** húrok és **egyenlő hosszúságú** ívek tartoznak.

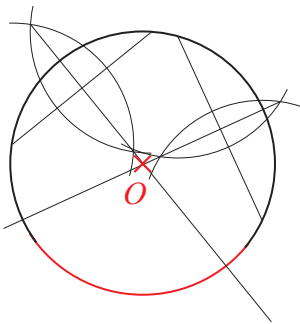
A KÖR

5.



A húr felező merőlegese áthalad a kör **középpontján**. Egy kör két, egymással nem párhuzamos húrjainak felező merőlegesei meghatározzák a kör **középpontját**.

6.



A kör kerülete és területe

7. a) 31,4 cm; b) 28,26 mm; c) 1,57 dm; d) 4,71 m.

8. a) 8 cm; b) 7,5 dm; c) 0,7 m; d) 0,16.

9. a) 153,86 cm²; b) 105,6296 mm²; c) 0,63585 dm²; d) 2,0096 m².

10. a) 5 cm; b) 8 dm; c) 0,2 m; d) kb. 0,51 cm.

11. Kati kerékpárjának a kereke a 2,5 kilométeres úton **1106** fordulatot tesz.

A KÖR

A körgyűrű kerülete és területe

12. $K_{\text{kicsi}} = 6 \pi$, $T_{\text{kicsi}} = 9 \pi$,

$K_{\text{nagy}} = 14 \pi$, $T_{\text{nagy}} = 49 \pi$,

$K_{\text{körgyűrű}} = 20 \pi = 62,8 \text{ cm}$, $T_{\text{körgyűrű}} = 40 \pi = 125,6 \text{ cm}^2$.

13. $K_{\text{körgyűrű}} = 40 \pi = 125,6 \text{ cm}$; $T_{\text{körgyűrű}} = 80 \pi = 251,2 \text{ cm}^2$.

14. Az üveghulladék területe **2752 cm²**.

Körcikk kerülete és területe

15. a) A körív hossza = 2,616 cm, $K_{\text{körcikk}} = 12,616 \text{ cm}$;

b) A körív hossza = 47,1 cm, $K_{\text{körcikk}} = 67,1 \text{ cm}$.

16. a) $T_{\alpha} = 33,493 \text{ cm}^2$; b) $T_{\beta} = 188,4 \text{ cm}^2$.

17. a) $r = 6 \text{ cm}$; b) $K_{\text{kör}} = 12 \pi = 37,68 \text{ cm}$; c) $T_{\text{hulladék}} = 30,96 \text{ cm}^2$; A négyzetlap **21,5** százaléka lett hulladék.

18. a) $K_{\square} = 39,6 \text{ cm}$; b) $T_{\text{hulladék}} = 55,86 \text{ cm}^2$; A körlap **kb. 36,3** százaléka lett hulladék.

19. a) $T_{\text{szürke}} = 21,5 \text{ cm}^2$; b) $T_{\text{szürke}} = 21,5 \text{ cm}^2$; c) $T_{\text{szürke}} = 60,75 \text{ cm}^2$.

20. $T_{\text{szürke}} = 43 \text{ cm}^2$.

21. $T_{\text{szürke}} = 50,24 \text{ cm}^2$.

Hasábok, hengerek

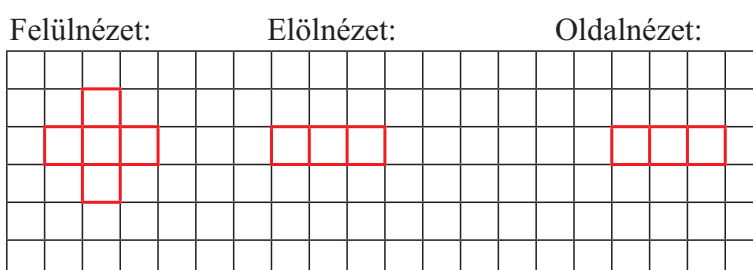
Egységkockából épített testek felszíne, térfogata

1. $A = 72 \text{ cm}^2$; $V = 32 \text{ cm}^3$

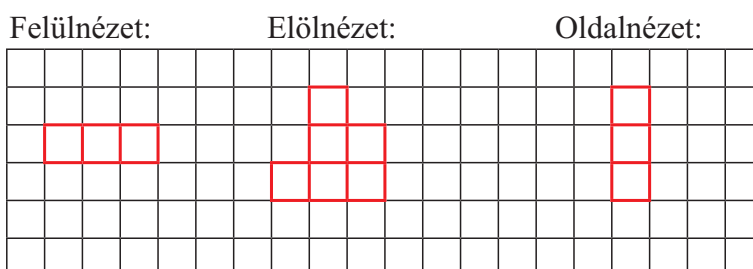
2. $A = 96 \text{ cm}^2$; $V = 56 \text{ cm}^3$

3. $A = 234 \text{ cm}^2$; $V = 162 \text{ cm}^3$

4. $A_{\text{test}} = 198 \text{ cm}^2$, $V_{\text{test}} = 135 \text{ cm}^3$.



5. $A_{\text{test}} = 600 \text{ cm}^2$, $V_{\text{test}} = 750 \text{ cm}^3$.



A hasáb

6. Egyenes hasáb: Az oldalélek **merőlegesek** az alaplapp síkjára.

oldalél = testmagasság

Ferde hasáb: Az oldalélek **nem merőlegesek** az alaplapp síkjára.

oldalél > testmagasság

7.

A hasáb alaplappja	Csúcsok száma (c)	Élek száma (e)	Lapok száma (l)
háromszög	6	9	5
négyszög	8	12	6
ötszög	10	15	7
hatszög	12	18	8

HASÁBOK, HENGEREK

nyolcszög	16	24	10
tízszög	20	30	12

$$c + 1 > e$$

$$c + 1 = e + 2$$

8. a) Nyolcszög; b) hatszög; c) kilencszög.

9. a) 45; b) 110; c) 72; d) hatszög, 126.

10. A kocka éle **26** centiméter.

$$\mathbf{11.} 218 \text{ cm}^2 = \mathbf{2,18} \text{ dm}^2,$$

$$2 \text{ 0,45 cm}^2 = \mathbf{2045} \text{ mm}^2,$$

$$5,7 \text{ dm}^2 = \mathbf{0,057} \text{ m}^2,$$

$$2 \text{ 6700 cm}^2 = \mathbf{2,67} \text{ m}^2,$$

$$203,4 \text{ m}^2 = \mathbf{0,0002034} \text{ km}^2,$$

$$2 \text{ 45 km}^2 = \mathbf{24500} \text{ ha},$$

$$325 \text{ cm}^2 = \mathbf{0,0325} \text{ m}^2,$$

$$8900 \text{ m}^2 = \mathbf{0,89} \text{ ha},$$

$$\frac{3}{4} \text{ cm}^2 = \mathbf{75} \text{ mm}^2,$$

$$\frac{4}{5} \text{ m}^2 = \mathbf{80} \text{ dm}^2.$$

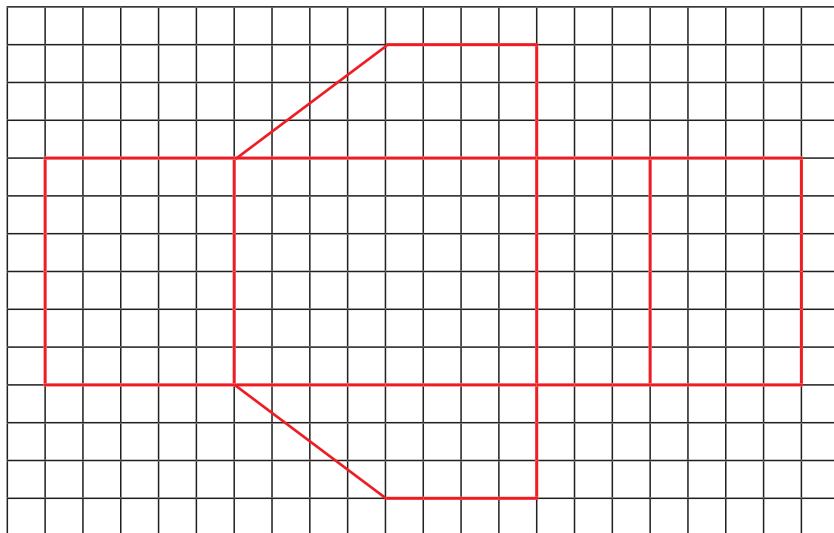
$$\mathbf{12.} A = 434 \text{ cm}^2.$$

$$\mathbf{13.} A = 7580 \text{ cm}^2.$$

$$\mathbf{14.} A = 465 \text{ cm}^2.$$

HASÁBOK, HENGEREK

15. $A = 39 \text{ cm}^2$.



16. $21 \text{ cm}^3 = 0,021 \text{ dm}^3$,

$0,04 \text{ cm}^3 = 40 \text{ mm}^3$,

$15,9 \text{ dm}^3 = 0,0159 \text{ m}^3$,

$63\,700 \text{ cm}^3 = 0,0637 \text{ m}^3$,

$3,4 \text{ m}^3 = 3400 \text{ liter}$,

$14,5 \text{ dm}^3 = 14\,500 \text{ cm}^3$,

$325 \text{ liter} = 325 \text{ dm}^3$,

$8900 \text{ cm}^3 = 8,9 \text{ liter}$,

$\frac{3}{5} \text{ cm}^3 = 600 \text{ mm}^3$,

$\frac{5}{8} \text{ m}^3 = 625 \text{ dm}^3$.

17. $V = 42,875 \text{ dm}^3 = 42,875 \text{ liter}$.

18. a) $V = 248 \text{ cm}^3$; b) Ha $\frac{3}{5}$ részéig töltjük **0,1488** dl víz lesz benne.

19. $V = 360 \text{ cm}^3$.

HASÁBOK, HENGEREK

20. a) $V = 288\,000\,000\text{ cm}^3$; b) A kiásott föld tömege **432** tonna.

21. A keletkezett doboz térfogata **45 cm³**.

22. A töltés **1425 m³** földet tartalmaz.

23. $A = 840\text{ cm}^2$; $V = 1200\text{ cm}^3$.

A henger

24. a) $A = 301,44\text{ cm}^2$, $V = 401,92\text{ cm}^3$; b) $A = 791,28\text{ dm}^2$, $V = 1695,5\text{ dm}^3$.

25. A fazékba **15,8256** liter víz fér.

26. $A = 904,32\text{ cm}^2$, $V = 2034,72\text{ cm}^3$.

27. $A_{\text{kifűrt test}} = 396,52\text{ cm}^2$, $V_{\text{kifűrt test}} = 368,6\text{ cm}^3$.

28. a) $r = 10\text{ cm}$, $m = 6\text{ cm}$, $A = 1004,8\text{ cm}^2$, $V = 1884\text{ cm}^3$;

b) $A = 602,88\text{ cm}^2$, $V = 1130,4\text{ cm}^3$;

c) $A = 345,4\text{ cm}^2$, $V = 471\text{ cm}^3$.

29. a) A tartály magassága **4 m**. b) A lefestett felület nagysága **103,62 cm²**.

30. A fahulladék térfogata **273,6 dm³**.

31. A doboz magassága **12,5 cm**.

32. A két edény megtöltéséhez **87,065** deciliter vízre volt szükség.

Év végi tudáspróba

1. feladatsor

1. a) $-\frac{17}{36}$; b) -7 .

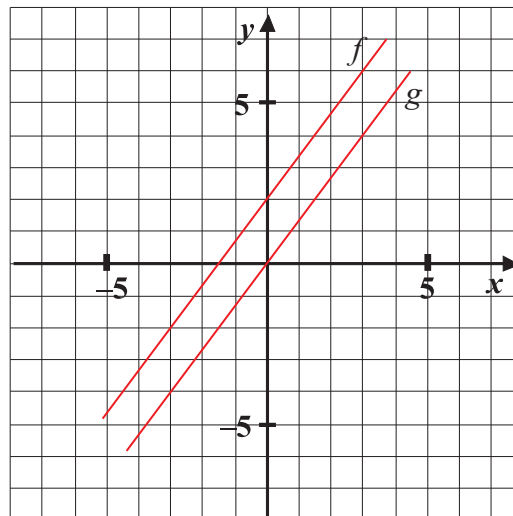
2. a) Összesen **280** köbméter földet termeltek ki.

b) A föld elszállításához a teherautó **80** fordult.

3. a) $x = 1$; b) $x = 11$.

4. A keresett szám **180**.

5. $g(x) = \frac{4}{3}x$.



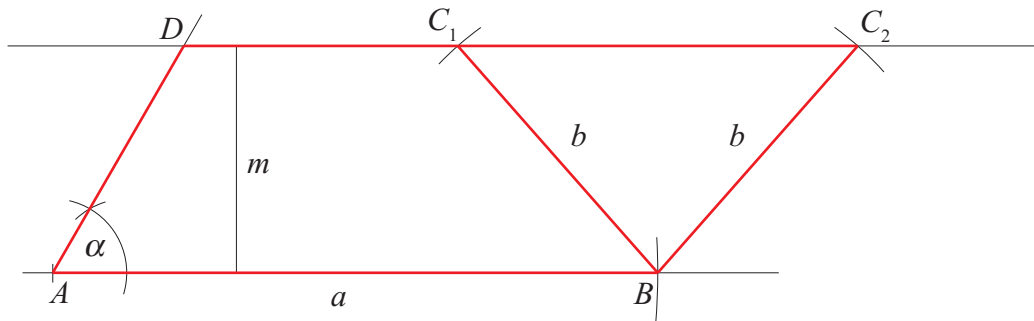
6. $\alpha = 67^\circ$, $\alpha' = 113^\circ$;
 $\beta = 44^\circ$, $\beta' = 136^\circ$;
 $\gamma = 69^\circ$, $\gamma' = 111^\circ$.

7. A magasságot **20%**-kal kell változtatni, hogy a paralelogramma területe ne változzon.

8. Szerkesztés menete:

1. A 8 cm-es AB szakasz felvétele.
2. A pontba 60° -os szög szerkesztése.
3. AB szakasszal párhuzamos (f) szerkesztése 3 cm távolságra.
4. A szög szár és f metszéspontja D .
5. B középpontú, 4 cm sugarú körív és f metszéspontja C_1 és C_2 .

A feladatnak 2 megoldása van.



9. $(2^2 \cdot 5 \cdot 7; 5^2 \cdot 7) = 35$, $[2^2 \cdot 5 \cdot 7; 5^2 \cdot 7] = 700$, $\frac{2^2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7}}{5^2 \cdot \cancel{7}} = \frac{4}{5}$, $\frac{2}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5^2 \cdot 7} = \frac{26}{700}$.

10. A sokszög **kilenc** oldalú, egy belső szöge 140° -os.

2. feladatsor

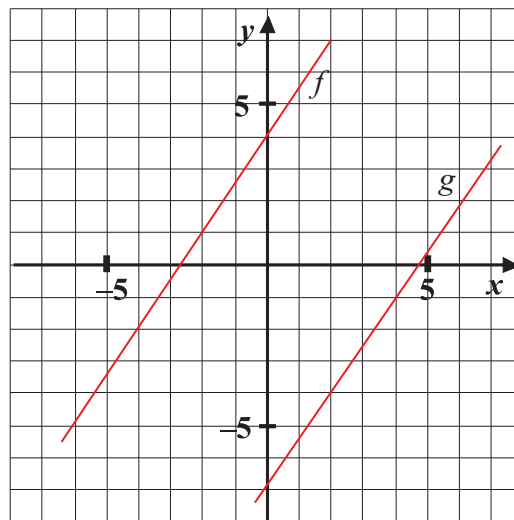
1. a) 15000; b) $-\frac{4}{21}$.

2. A nagyobb szám 0,7.

3. a) $x = 1$; b) $x \leq 24$.

4. A keresett számok 138 és 86.

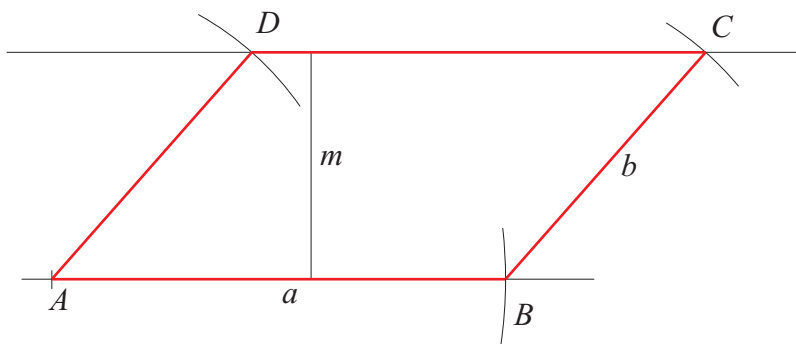
5. $g(x) = \frac{3}{2}x - 7$.



6. a) Az akvárium elkészítéséhez **4730 cm²** üveget használtak fel.
b) Az akváriumban az adott feltétel mellett **25,65** liter víz van.

7. A 32 embernek az adott feltételek mellett **9** napig tart a búza aratása.

8. $K = 20$ cm, $T = 18$ cm².



ÉV VÉGI TUDÁSPRÓBA

9. A háromszög belső szögei 28° , 60° , 92° .

10. $K_{\text{körcikk}} = 32,746 \text{ cm}$, $T_{\text{körcikk}} = 66,986 \text{ cm}^2$.

3. feladatsor

1.

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$
$-\frac{33}{55} = -\frac{3}{5}$	$-\frac{520}{780} = -\frac{2}{3}$	$-1\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$
1224	-0,36	11,88	12,6	-4,4064	-34

2. $T = 192 \text{ cm}^2$.

3. $\frac{1-2xy}{3x^2y} = -3\frac{1}{3}$.

4. Az üzemnek összesen **1400** dolgozója van.

5. a) $y = -11$; b) $x > \frac{20}{6}$.

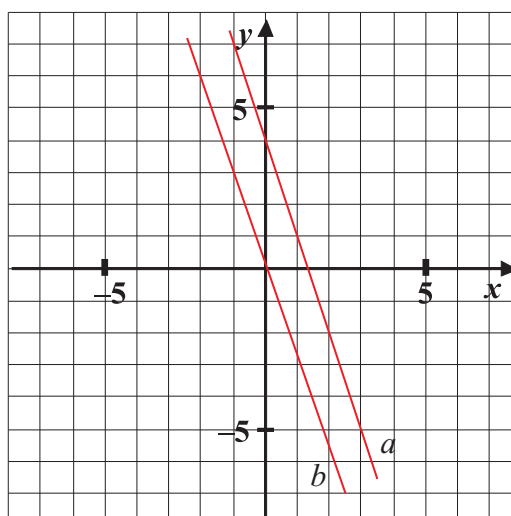
6. a) A szabályos sokszögnek **14** oldala van.

b) A szabályos sokszög összes átlóinak száma **77**.

c) A szabályos sokszög egy-egy belső szöge **$154\frac{2}{7}^\circ$** .

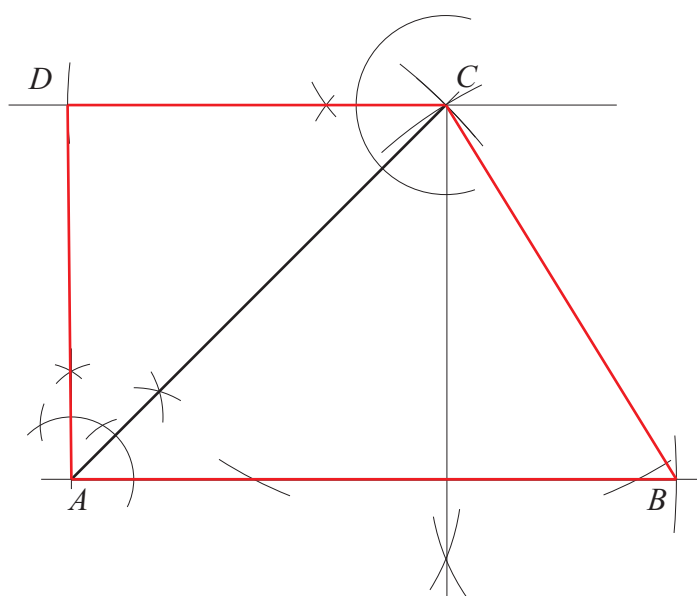
ÉV VÉGI TUDÁSPRÓBA

7. $a(x) = -3x + 4$, $b(x) = -3x$.



8. Szerkesztés menete:

1. Az ABC háromszög megszerkesztése.
2. C ponton át párhuzamos egyenes szerkesztése az AB szakasszal.
3. C középpontú 5 cm sugarú körív és a párhuzamos metszéstengelye D .



9. $V = 360 \text{ cm}^3$. A test tömege **972** gramm.

10. Kati most **30** éves.